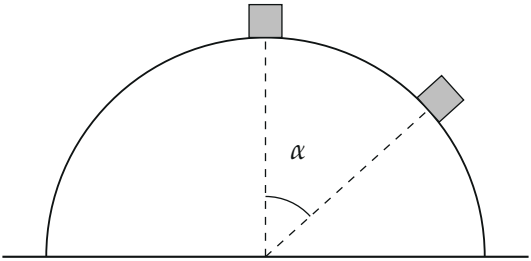
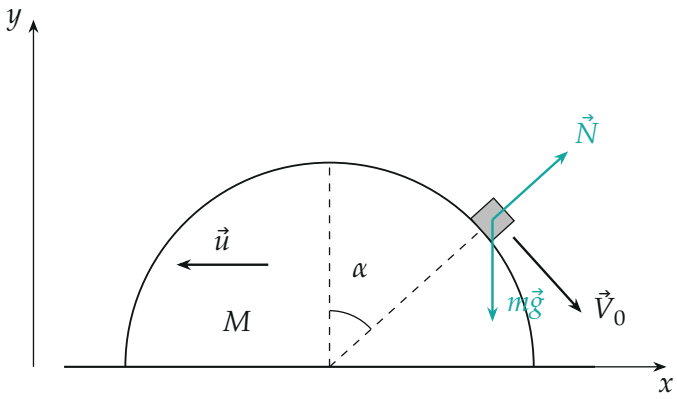
Отрыв бруска от подвижной полусферы

Задача 1. [Курчатов 2018/19, 10 класс, задача 1] Маленький брусок начинает соскальзывать с вершины гладкой полусферы, стоящей на гладком горизонтальном столе, и в некоторой точке отрывается от неё. Центральный угол между радиусами полусферы, проведёнными к её вершине и к точке отрыва, равен $\alpha = \arccos(0{,}67)$. Найдите отношение x массы полусферы M к массе бруска m: $x = M/m$.



▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на законы сохранения в системе «брусок + подвижная опора» и условие отрыва. Брусок давит на полусферу, и та отъезжает влево; горизонтальный импульс системы сохраняется (стол гладкий), полная механическая энергия — тоже (всё гладкое). Третье уравнение даёт момент отрыва: $N = 0$. В этот момент полусферу ничто не толкает по горизонтали, её ускорение равно нулю — и система отсчёта полусферы на мгновение инерциальна. В ней брусок движется по окружности радиуса R, и его центростремительное ускорение создаёт одна только проекция $\vec{g}$ на радиус.

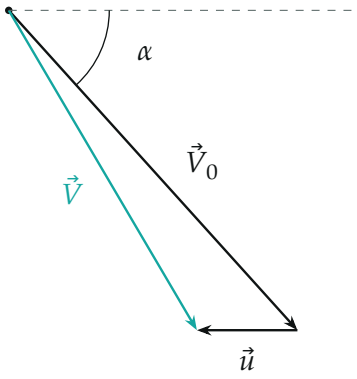
Обозначения. R — радиус полусферы; $\vec{u}$ — скорость полусферы относительно стола (влево); $\vec{V}_0$ — скорость бруска относительно полусферы (по касательной); $\vec{V}$ — скорость бруска относительно стола; ось x — вправо вдоль стола, y — вверх; $c = \cos\alpha = 0{,}67$.



Силы на брусок в системе стола: $m\vec{g}$ и $\vec{N}$ по радиусу. Брусок скользит по касательной со скоростью $\vec{V}_0$ относительно полусферы, полусфера отъезжает влево со скоростью $\vec{u}$.

1. Сложение скоростей. Скорость бруска относительно стола $\vec{V} = \vec{u} + \vec{V}_0$ (рисунок 3). $\vec{V}_0$ направлена по касательной к окружности, вниз-вправо под углом α к горизонту, $\vec{u}$ — влево:

$$V_x = V_0 \cos\alpha - u, \qquad V_y = -V_0 \sin\alpha.$$



Скорость бруска относительно стола: $\vec{V} = \vec{V}_0 + \vec{u}$; угол между $\vec{V}_0$ и горизонталью равен α.

2. Закон сохранения горизонтального импульса системы «брусок + полусфера». Внешние силы — тяжести и реакции стола — вертикальны, трения нет, вначале всё покоится:

$$m(V_0\cos\alpha - u) - Mu = 0 \quad \Rightarrow \quad u = \frac{mV_0\cos\alpha}{M+m}.$$

3. Закон сохранения механической энергии системы. Работу совершает только сила тяжести бруска (реакция полусферы на брусок и бруска на полусферу в сумме работы не совершают — поверхности гладкие); брусок опустился на $R(1-\cos\alpha)$:

$$mgR(1-\cos\alpha) = \frac{Mu^2}{2} + \frac{m[(V_0\cos\alpha - u)^2 + V_0^2\sin^2\alpha]}{2}.$$

Раскроем скобки: $V^2 = V_0^2 - 2uV_0\cos\alpha + u^2$, и

$$2mgR(1-\cos\alpha) = (M+m)u^2 - 2muV_0\cos\alpha + mV_0^2.$$

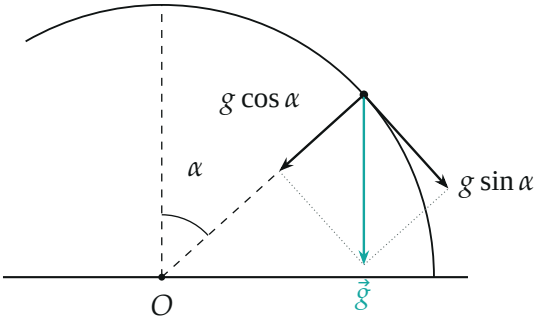
Подставим u из шага 2; обозначим $\mu = m/(M+m)$:

$$(M+m)u^2 = m\mu V_0^2\cos^2\alpha, \qquad 2muV_0\cos\alpha = 2m\mu V_0^2\cos^2\alpha,$$

$$2gR(1-\cos\alpha) = V_0^2(1-\mu\cos^2\alpha).$$

4. Условие отрыва: второй закон Ньютона. Для полусферы по горизонтали: $Mw = N\sin\alpha$. В момент отрыва $N = 0$, значит $w = 0$ — система отсчёта полусферы в этот момент инерциальная, и в ней брусок движется по окружности радиуса R со скоростью V_0. Второй закон Ньютона для бруска $m\vec{a}_0 = m\vec{g} + \vec{N}$, $\vec{N} = 0$, в проекции на радиус к центру (рисунок 4):

$$\frac{mV_0^2}{R} = mg\cos\alpha \quad \Rightarrow \quad V_0^2 = gR\cos\alpha.$$



В момент отрыва в инерциальной (на этот миг) системе полусферы ускорение бруска равно $\vec{g}$. Проекция на радиус $g\cos\alpha$ — центростремительное ускорение V_0^2/R, проекция $g\sin\alpha$ — касательное.

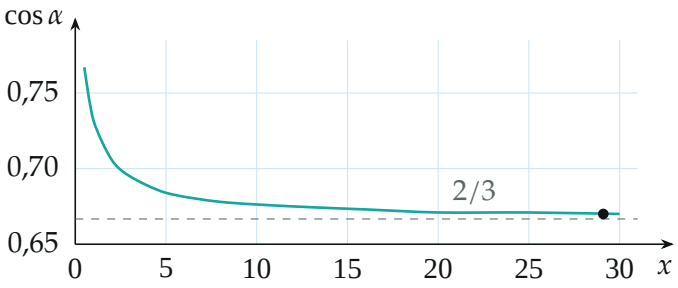
5. Масса полусферы. Подставим $V_0^2 = gR\cos\alpha$ в уравнение энергии и сократим на gR:

$$2(1-\cos\alpha) = \cos\alpha\,(1-\mu\cos^2\alpha) \quad \Rightarrow \quad \mu\cos^3\alpha = 3\cos\alpha - 2.$$

Так как $1/\mu = (M+m)/m = x+1$:

$$x = \frac{\cos^3\alpha}{3\cos\alpha - 2} - 1 = \frac{0{,}67^3}{3\cdot 0{,}67 - 2} - 1 = \frac{0{,}3008}{0{,}01} - 1 \approx 29.$$

Обратите внимание. Знаменатель $3\cos\alpha - 2 = 0{,}01$ — разность близких чисел, поэтому ответ очень чувствителен к $\cos\alpha$: при $\cos\alpha = 0{,}68$ получилось бы $x \approx 6{,}9$. Угол отрыва с неподвижной опорой — $\cos\alpha = 2/3$; подвижная полусфера «уходит из-под» бруска, и он отрывается раньше, ближе к вершине (рисунок 5).



Косинус угла отрыва в зависимости от $x = M/m$ по формуле шага 5; при $x \to 0$ $\cos\alpha \to 1$. Пунктир — предел неподвижной полусферы $\cos\alpha = 2/3$, точка — данные задачи.

Ответ:

$$x = \frac{\cos^3\alpha}{3\cos\alpha - 2} - 1 \approx 29.$$

Проверка. Размерность: x безразмерно, как и должно быть. Предел $M \to \infty$ ($\mu \to 0$): $3\cos\alpha = 2$ — известный отрыв с неподвижной полусферы. Предел $M \to 0$ ($x = 0$): $\cos^3\alpha = 3\cos\alpha - 2$, корень $\cos\alpha = 1$ — невесомая полусфера сразу уезжает, брусок отрывается в вершине. Численно (python): $0{,}67^3/0{,}01 - 1 = 29{,}08$.

Ответ. $x = \dfrac{\cos^3\alpha}{3\cos\alpha - 2} - 1 \approx 29.$