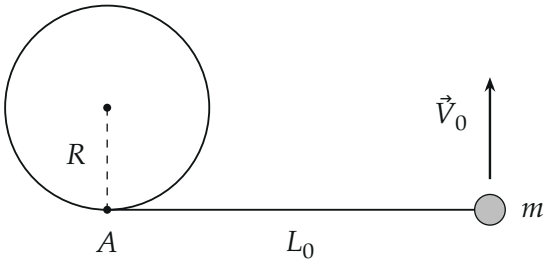
Нить наматывается на столб

Задача 2. [Курчатов 2018/19, 10 класс, задача 2] На гладкой горизонтальной поверхности неподвижно закреплён вертикальный столб радиуса $R = 20$ см. К точке A, лежащей на поверхности столба, прикреплён конец невесомой нерастяжимой нити длины $L_0 = 4$ м. К другому концу нити прикреплена маленькая шайба массы $m = 50$ г. В начальном положении шайба неподвижна, а нить направлена по касательной к окружности столба в точке A (см. вид сверху на рисунке). Шайбе сообщают скорость $V_0 = 2$ м/с, направленную перпендикулярно нити. В результате нить начинает наматываться на столб. Считая, что нить всё время остаётся горизонтальной, найдите следующие величины:

1. Число N оборотов нити вокруг столба к моменту, когда сила натяжения нити станет равна $T_0 = 0{,}1$ Н. Числовой ответ округлите до десятых.
2. Время τ, за которое нить сделает это число оборотов. Числовой ответ выразите в секундах.

Трение не учитывайте, шайбу считайте материальной точкой.



▲ **Решение.** **Что происходит.** Это задача на движение по окружности с переменным радиусом. Сила натяжения нити всегда перпендикулярна скорости шайбы, поэтому работы не совершает — модуль скорости остаётся V_0. В каждый момент шайба движется по дуге окружности с центром в точке B, где нить отходит от столба; радиус этой окружности — свободная длина нити L, и она уменьшается по мере наматывания. Чем короче нить, тем больше нужна центростремительная сила, — так

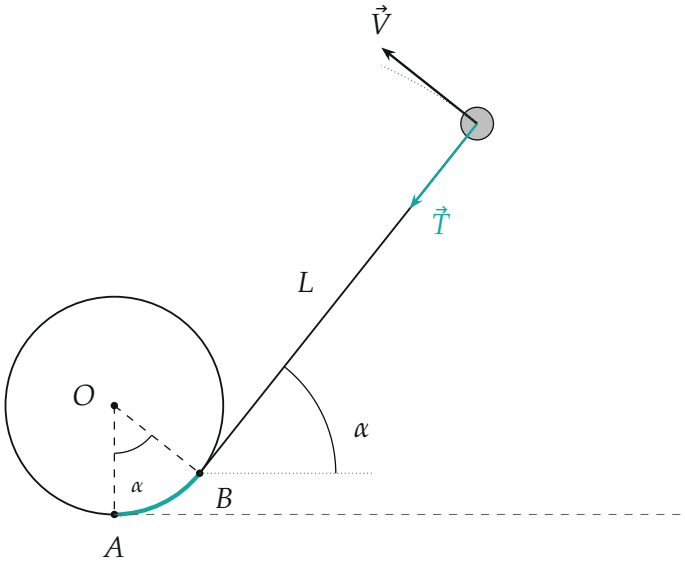
натяжение дорастает до T_0. Время найдём суммированием малых участков пути.

Обозначения. α — угол, на который повернулась нить (он же центральный угол дуги AB, намотанной на столб); $L = L_0 - \alpha R$ — длина свободного участка нити; T — сила натяжения; α_0 — угол, при котором $T = T_0$.

1. Модуль скорости не меняется: теорема о кинетической энергии. В горизонтальной плоскости на шайбу действует только сила натяжения $\vec{T}$ (сила тяжести и реакция поверхности вертикальны и уравновешены). Нить нерастяжима, точка B касания в данный момент неподвижна, поэтому шайба движется перпендикулярно нити: $\vec{T} \perp \vec{V}$, мощность $\vec{T} \cdot \vec{V} = 0$, и $V = V_0$ всё время.

2. Длина свободной нити. Нить повернулась на угол α — и касательная точка сместилась по окружности столба на тот же угол: радиус OB перпендикулярен нити, а нить повернулась на α (рисунок 2). На столб намоталась дуга AB длиной αR:

$$L = L_0 - \alpha R.$$



Нить повернулась на угол α; на столб намоталась дуга AB (бирюзовая) длиной αR. Шайба движется по дуге (пунктир) с центром B и радиусом L; $\vec{T}$ направлена к B, $\vec{V} \perp \vec{T}$.

Пункт 1.

3. Натяжение: второй закон Ньютона в проекции на нить. Мгновенный центр окружности — точка B, радиус — L, ускорение направлено к B и равно V_0^2/L:

$$\frac{mV_0^2}{L_0 - \alpha R} = T \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{1}{R}\left(L_0 - \frac{mV_0^2}{T}\right).$$

Натяжение растёт с α: в начале $T = mV_0^2/L_0 = 0{,}05$ Н, а $T_0 = 0{,}1$ Н достигается, когда свободная длина станет

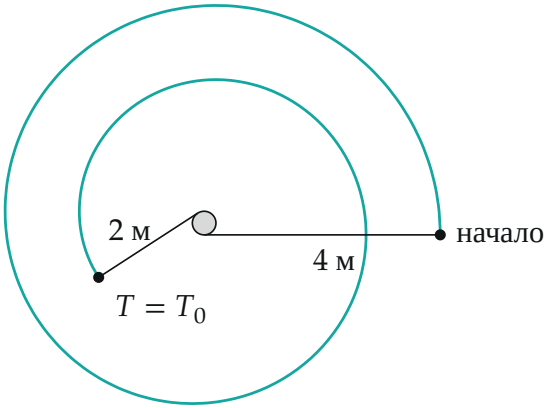
$$L_1 = \frac{mV_0^2}{T_0} = \frac{0{,}05 \cdot 4}{0{,}1} = 2 \text{ м}.$$

4. Число оборотов.

$$\alpha_0 = \frac{L_0 - L_1}{R} = \frac{4-2}{0{,}2} = 10 \text{ рад},$$

$$N = \frac{\alpha_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi R}\left(L_0 - \frac{mV_0^2}{T_0}\right) = 1{,}59 \approx 1{,}6.$$

Траектория шайбы — раскручивающаяся наоборот спираль (эвольвента окружности), рисунок 3.



Траектория шайбы в масштабе задачи (вид сверху; кружок — столб $R = 20$ см). За 1,59 оборота свободная длина нити уменьшилась с 4 м до 2 м.

Пункт 2.

5. Время: суммирование малых участков пути. За малое время Δt нить поворачивается на $\Delta\alpha$, и шайба проходит дугу радиуса L (пунктир на рисунке 2):

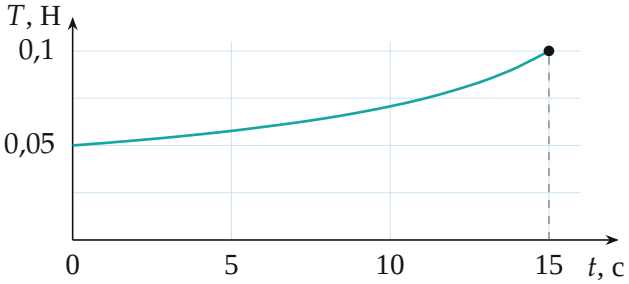
$$V_0\,\Delta t = L\,\Delta\alpha = (L_0 - \alpha R)\,\Delta\alpha.$$

Сложим все участки от $\alpha = 0$ до α_0. Сумма $\sum \Delta t = \tau$, сумма $\sum \Delta\alpha = \alpha_0$, а $\sum \alpha\,\Delta\alpha$ — площадь под графиком $y = \alpha$ от 0 до α_0, то есть площадь треугольника $\alpha_0^2/2$:

$$V_0\tau = L_0\alpha_0 - \frac{R\alpha_0^2}{2} = \frac{(L_0 - L_1)(L_0 + L_1)}{2R} = \frac{L_0^2 - L_1^2}{2R}.$$

$$\tau = \frac{1}{2V_0R}\left[L_0^2 - \left(\frac{mV_0^2}{T_0}\right)^2\right] = \frac{16 - 4}{2 \cdot 2 \cdot 0{,}2} = 15 \text{ с}.$$

6. Второй способ — через площадь, «заметаемую» нитью. Сумма $\sum L\,\Delta\alpha$ — это то же самое, что площадь под графиком $L(\alpha)$, трапеции с основаниями L_0 и L_1 и высотой α_0: $\frac{L_0+L_1}{2}\alpha_0 = 3 \cdot 10 = 30$ м, а $\tau = 30/V_0 = 15$ с. Из того же равенства следует $L(t) = \sqrt{L_0^2 - 2RV_0t}$ и $T(t) = mV_0^2/L(t)$ — рисунок 4.



Натяжение нити $T(t) = mV_0^2/\sqrt{L_0^2 - 2RV_0t}$; оно удваивается к моменту $\tau = 15$ с.

Обратите внимание. Скорость шайбы не растёт, хотя нить укорачивается, — в отличие от нити, втягиваемой в отверстие, где сила направлена к неподвижной точке и сохраняется момент импульса. Здесь сила направлена к точке касания B, которая сама перемещается; момент импульса относительно оси столба не сохраняется, зато $\vec{T} \perp \vec{V}$ и сохраняется энергия.

Ответ:

$$N = \frac{1}{2\pi R}\left(L_0 - \frac{mV_0^2}{T_0}\right) \approx 1{,}6,$$

$$\tau = \frac{1}{2V_0R}\left[L_0^2 - \left(\frac{mV_0^2}{T_0}\right)^2\right] = 15 \text{ с}.$$

Проверка. Размерности: mV_0^2/T_0 — метры, N безразмерно, $L^2/(V_0R)$ — секунды. Предел $R \to 0$: нить почти не наматывается, $\tau \to \infty$ — верно. Численно (python): сумма $\sum L\,\Delta\alpha/V_0$ с шагом $\Delta\alpha = 10^{-4}$ даёт 15,00 с.

Ответ. 1) $N = \dfrac{L_0 - mV_0^2/T_0}{2\pi R} \approx 1{,}6$; 2) $\tau = \dfrac{L_0^2 - (mV_0^2/T_0)^2}{2V_0R} = 15$ с.