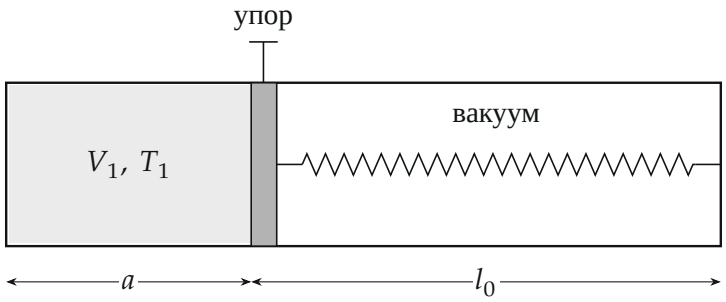
Гелий и поршень с пружиной

Задача 3. [Курчатов 2018/19, 10 класс, задача 3] В закрытом горизонтальном цилиндре может без трения двигаться поршень, прикреплённый пружиной к правому торцу цилиндра. Слева от поршня находится гелий, справа — вакуум. В начальном состоянии поршень закреплён, пружина не деформирована, объём гелия $V_1 = 2$ л, температура $T_1 = 300$ К. Поршень отпускают, и через некоторое время система приходит в состояние механического и теплового равновесия, в котором объём гелия $V_2 = 3$ л. Считая, что стенки цилиндра и поршень не проводят тепло, найдите температуру T_2 гелия в этом состоянии.



Поясняющий рисунок: начальное состояние. Поршень закреплён, пружина длиной l_0 не деформирована, справа вакуум.

▲ **Решение.** **Что происходит.** Это задача на первый закон термодинамики для необратимого процесса. После того как поршень отпустили, он разгоняется, проскакивает положение равновесия, колеблется; колебания затухают из-за вязкости газа — процесс неравновесный, и формула адиабаты здесь не годится. Зато можно сравнить только начальное и конечное состояния: тепло не поступает, внешние силы над системой «газ + поршень + пружина» работы не совершают (цилиндр закрыт и неподвижен), поэтому её энергия сохраняется. Часть внутренней энергии гелия переходит в энергию сжатой пружины, газ остывает.

Обозначения. S — площадь поршня; a — начальная длина столба гелия, $V_1 = Sa$; x — сжатие пружины в конце, $V_2 = S(a + x)$; k —

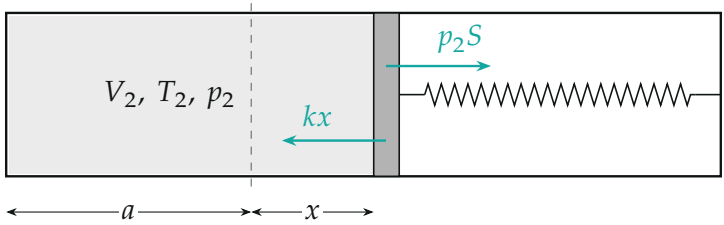
жёсткость пружины; ν — количество гелия; p_2 — конечное давление; R — газовая постоянная.

1. Закон сохранения энергии системы «гелий + поршень + пружина». Тепла нет, работы внешних сил нет. В начале поршень покоится, пружина не деформирована; в конце поршень снова покоится (равновесие), пружина сжата на x. Внутренняя энергия одноатомного гелия $U = \frac{3}{2}\nu RT$:

$$\frac{3}{2}\nu RT_1 = \frac{3}{2}\nu RT_2 + \frac{kx^2}{2}.$$

2. Равновесие поршня: второй закон Ньютона в проекции на ось цилиндра. Справа вакуум, поэтому на поршень действуют только сила давления газа p_2S (вправо) и сила упругости kx (влево), рисунок 2:

$$p_2S = kx.$$



Конечное равновесие: поршень сместился на x (пунктир — прежнее положение), пружина сжата на x; сила давления газа уравновешена силой упругости.

3. Уравнение Менделеева — Клапейрона для конечного состояния.

$$p_2 \cdot S(a + x) = \nu RT_2 \quad \Rightarrow \quad kx\,(a + x) = \nu RT_2,$$

$$\frac{kx^2}{2} = \frac{\nu RT_2}{2} \cdot \frac{x}{a + x}.$$

Отношение $x/(a + x)$ выражается через объёмы: умножим числитель и знаменатель на S,

$$\frac{x}{a + x} = \frac{Sx}{S(a + x)} = \frac{V_2 - V_1}{V_2}.$$

Энергия пружины — доля $\frac{V_2-V_1}{3V_2}$ от конечной внутренней энергии газа.

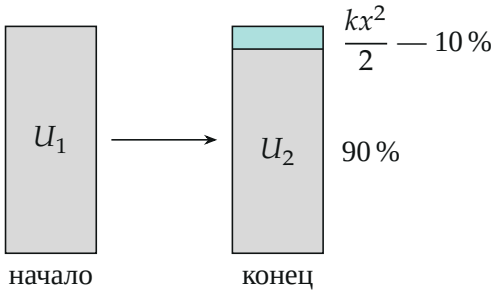
4. Температура. Подставим в закон сохранения энергии и сократим на $\nu R/2$:

$$3T_1 = 3T_2 + T_2\,\frac{V_2 - V_1}{V_2},$$

$$T_2 = T_1\,\frac{3V_2}{4V_2 - V_1} = 300 \cdot \frac{9}{10} = 270\ \text{K}.$$

Жёсткость пружины и площадь поршня в ответ не вошли: их «знает» конечный объём V_2.

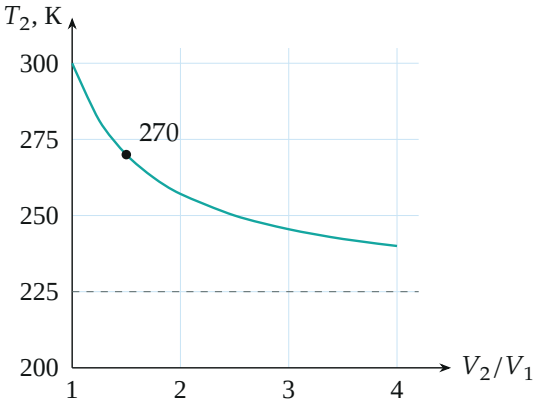
5. Энергетический баланс в числах. На рисунке 3 — куда ушла энергия: $\frac{3}{2}\nu RT_1$ делится на $\frac{3}{2}\nu RT_2$ (90 %) и $kx^2/2$ (10 %).



Энергия системы до и после: внутренняя энергия гелия частично перешла в энергию сжатой пружины.

Обратите внимание. Процесс не адиабатный в смысле $pV^{5/3} = \text{const}$: он необратимый (поршень колебался, кинетическая энергия рассеялась в газе). Адиабата дала бы при расширении 2 → 3 л температуру $300 \cdot (2/3)^{2/3} \approx 229$ K — неверно. Закон сохранения энергии от вида процесса не зависит.

6. Как ответ зависит от растяжения. Если бы пружина была мягче, объём V_2 получился бы больше. По формуле $T_2 = 3T_1V_2/(4V_2 - V_1)$ при $V_2 \to \infty$ (очень мягкая пружина) $T_2 \to \frac{3}{4}T_1 = 225$ K: на пружину уходит не больше четверти энергии (рисунок 4).



Конечная температура в зависимости от V_2/V_1 при $T_1 = 300$ K; пунктир — предел $\frac{3}{4}T_1$, точка — данные задачи ($V_2/V_1 = 1{,}5$).

Ответ:

$$T_2 = T_1\,\frac{3V_2}{4V_2 - V_1} = 270\text{ K}.$$

Проверка. Размерность: отношение объёмов безразмерно, T_2 — в кельвинах. Предел $V_2 = V_1$ (бесконечно жёсткая пружина): $T_2 = T_1$ — газ не расширялся, энергия не ушла. Второй способ шага 3: энергия пружины $\frac{kx^2}{2} = \frac{1}{2}p_2\,\Delta V = \frac{1}{2}p_2(V_2 - V_1)$ (сила упругости растёт линейно, работа — половина «$p_2\Delta V$»); тогда $\frac{3}{2}\nu R(T_1 - T_2) = \frac{1}{2}\cdot\frac{\nu R T_2}{V_2}(V_2 - V_1)$ — то же уравнение.

Ответ. $T_2 = T_1\dfrac{3V_2}{4V_2 - V_1} = 270$ K.