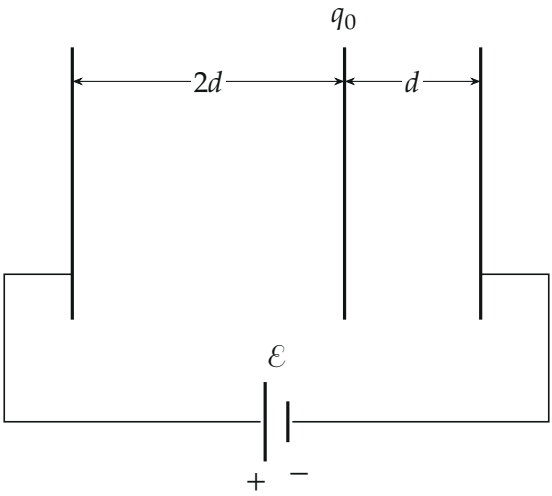
Конденсатор из трёх пластин

Задача 4. [Курчатов 2018/19, 10 класс, задача 4] Плоский конденсатор состоит из трёх одинаковых тонких проводящих пластин, расположенных параллельно друг другу. Расстояние между левой и средней пластинами в два раза больше, чем между средней и правой. Конденсатор заряжают, присоединив левую пластину к положительному полюсу батареи, а правую к отрицательному. Найдите, на какую величину Δq изменится заряд конденсатора, если средней пластине сообщить заряд $q_0 = 1{,}8$ нКл. Числовой ответ выразите в нанокулонах. Краевыми эффектами пренебрегите.



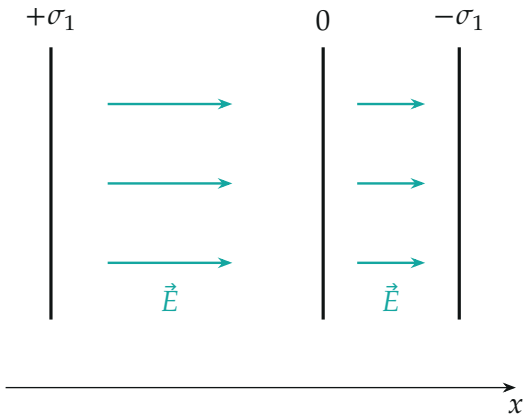
Поясняющий рисунок: три пластины, крайние подключены к батарее с ЭДС $\mathcal{E}$, средней сообщают заряд q_0.

▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на поле заряженных плоскостей и принцип суперпозиции. Батарея держит неизменным напряжение между крайними пластинами. Заряд на средней пластине добавляет своё поле: слева от неё оно направлено влево (против основного поля), справа — вправо (по нему). Промежутки неравные, поэтому вклады в напряжение не компенсируются: в широком промежутке $2d$ поле ослабло на большем отрезке, чем усилилось в узком. Чтобы напряжение осталось прежним, батарея докачивает заряд на крайние пластины.

Обозначения. S — площадь пластин; $\mathcal{E}$ — ЭДС батареи; $\sigma_1 = q_1/S$ — плотность заряда левой пластины до зарядки средней; $\sigma_0 = q_0/S$; $\Delta\sigma$ — прирост плотности на левой пластине; ось x — слева направо; область 1 — между левой и средней пластинами, область 2 — между средней и правой.

1. До зарядки средней пластины. Крайние пластины несут $+\sigma_1$ и $-\sigma_1$, средняя нейтральна (на её сторонах наведены $-\sigma_1$ и $+\sigma_1$, поле не меняется). Поле между крайними пластинами однородно, $E = \sigma_1/\varepsilon_0$, напряжение на расстоянии $3d$ (рисунок 2):

$$\mathcal{E} = E \cdot 3d = \frac{3d\sigma_1}{\varepsilon_0}.$$



До зарядки средней пластины: поле $E = \sigma_1/\varepsilon_0$ одинаково в обеих областях, средняя пластина его не меняет.

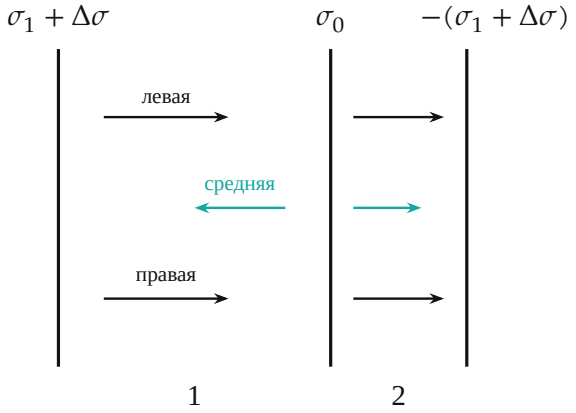
2. После зарядки: какие заряды на пластинах. Крайние пластины соединены через батарею, их общий заряд не меняется и остаётся нулевым: на левой $\sigma_1 + \Delta\sigma$, на правой $-(\sigma_1 + \Delta\sigma)$. На средней — σ_0.

3. Поля в областях: принцип суперпозиции. Каждая пластина с плотностью σ создаёт по обе стороны поле $\sigma/(2\varepsilon_0)$, направленное от

неё при $\sigma > 0$ (рисунок 3). В проекции на ось x:

$$E_{1x} = \frac{\sigma_1 + \Delta\sigma}{2\varepsilon_0} - \frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0} + \frac{\sigma_1 + \Delta\sigma}{2\varepsilon_0} = \frac{\sigma_1 + \Delta\sigma}{\varepsilon_0} - \frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0},$$

$$E_{2x} = \frac{\sigma_1 + \Delta\sigma}{\varepsilon_0} + \frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0}.$$



Вклады пластин в поле внутри конденсатора. Крайние пластины дают в обеих областях по $(\sigma_1 + \Delta\sigma)/(2\varepsilon_0)$ вправо; средняя (бирюзовые стрелки) — $\sigma_0/(2\varepsilon_0)$ влево в области 1 и вправо в области 2.

4. Напряжение не изменилось: батарея та же. Напряжение между крайними пластинами — сумма произведений E_x на длину каждой области:

$$\mathcal{E} = 2d\,E_{1x} + d\,E_{2x} = \frac{3d(\sigma_1 + \Delta\sigma)}{\varepsilon_0} - \frac{d\sigma_0}{\varepsilon_0} + \frac{d\sigma_0}{2\varepsilon_0},$$

$$\mathcal{E} = \frac{3d\sigma_1}{\varepsilon_0} + \frac{d}{\varepsilon_0}\Big(3\Delta\sigma - \frac{\sigma_0}{2}\Big).$$

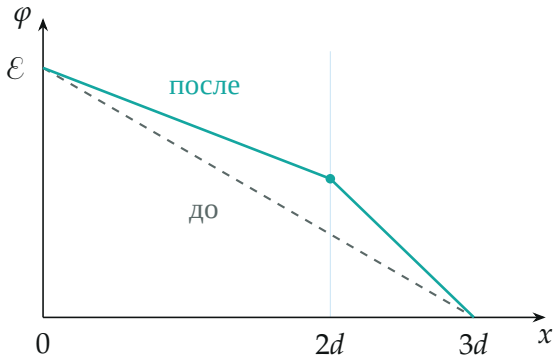
Сравним с шагом 1:

$$3\Delta\sigma - \frac{\sigma_0}{2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta\sigma = \frac{\sigma_0}{6}.$$

5. Изменение заряда.

$$\Delta q = S\,\Delta\sigma = \frac{q_0}{6} = \frac{1{,}8}{6} = 0{,}3 \text{ нКл}.$$

Знак плюс: заряд конденсатора (левой пластины) увеличился, батарея перекачала 0,3 нКл с правой пластины на левую. График потенциала (рисунок 4) показывает, как это выглядит: излом на средней пластине, а разность потенциалов концов прежняя.



Потенциал между пластинами при $\sigma_0 = \sigma_1$: до зарядки средней пластины (пунктир) и после (бирюзовая). В области 1 поле слабее, в области 2 сильнее; концы закреплены батареей.

Обратите внимание. Ответ не зависит ни от ЭДС, ни от площади: изменение заряда линейно по q_0 и определяется только отношением промежутков. При равных промежутках (d и d) было бы $\Delta q = 0$: ослабление и усиление поля компенсируются.

Ответ:

$$\Delta q = \frac{q_0}{6} = 0{,}3 \text{ нКл (заряд увеличится)}.$$

Проверка. Размерность: $\sigma d/\varepsilon_0$ — вольты, Δq — кулоны. Второй способ (общий случай промежутков d_1 и d_2): $\Delta\sigma(d_1 + d_2) = \frac{\sigma_0}{2}(d_1 - d_2)$, $\Delta q = \frac{q_0}{2} \cdot \frac{d_1 - d_2}{d_1 + d_2} = \frac{q_0}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{q_0}{6}$; при $d_1 = d_2$ — ноль, как и сказано выше.

Ответ. $\Delta q = \dfrac{q_0}{6} = 0{,}3$ нКл.