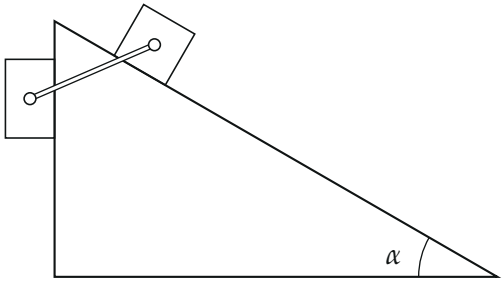
Два груза со стержнем ($m_2 = 3m_1$)

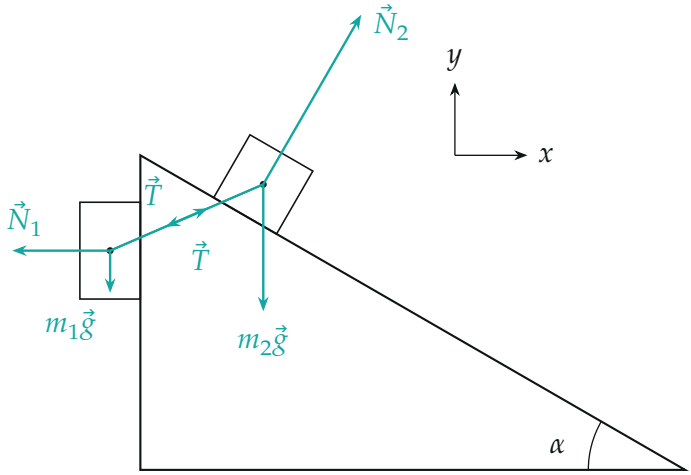
Задача 5. [Курчатов 2018/19, 10 класс, задача 5] На наклонной плоскости покоятся два груза, соединенные стержнем (см. рисунок). Найдите угол между стержнем и горизонтом, если $\alpha = 30°$, а масса правого груза втрое больше левого.



▲ **Решение.** **Что происходит.** Это задача на равновесие системы тел. Трения нет (в условии о нём ничего не сказано, и без трения ответ однозначен). Левый груз висит у вертикальной стенки: удержать его от падения может только стержень, значит, стержень растянут и тянет левый груз вверх-вправо, а правый — вниз-влево. Правый груз лежит на гладкой наклонной плоскости и не соскальзывает только потому, что стержень его держит. Угол стержня получится из условий равновесия каждого груза.

Обозначения. $m_1 = m$ и $m_2 = 3m$ — массы левого и правого грузов; β — угол стержня с горизонтом; T — сила натяжения стержня; N_1 — сила реакции вертикальной стенки, N_2 — наклонной плоскости; ось x — горизонтально вправо, y — вверх.

1. Силы. Стержень лёгкий и шарнирно прикреплён к грузам, поэтому сила, с которой он действует на каждый груз, направлена вдоль стержня. Реакции гладких поверхностей — по нормали: $\vec{N}_1$ горизонтальна (от стенки, влево), $\vec{N}_2$ перпендикулярна наклонной плоскости и наклонена к вертикали на угол α (рисунок 2).



Силы на грузы. Стержень растянут: тянет левый груз к правому и правый — к левому с одинаковой силой T (третий закон Ньютона); длины стрелок — по модулям при $m_2 = 3m_1$.

2. Левый груз: первый закон Ньютона в проекции на ось y. Стенка вертикальна, её реакция в проекцию на y не входит:

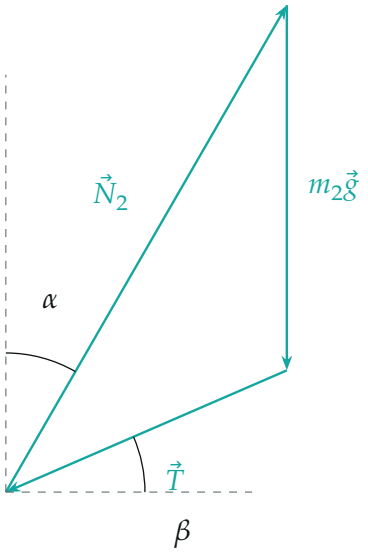
$$T\sin\beta - m_1 g = 0 \quad \Rightarrow \quad T\sin\beta = m_1 g.$$

(Проекция на x даёт $N_1 = T\cos\beta$ — она для угла не нужна.)

3. Правый груз: условие равновесия в проекциях на x и y. Нормаль к плоскости составляет угол α с вертикалью, поэтому $\vec{N}_2$ имеет проекции $N_2\sin\alpha$ и $N_2\cos\alpha$; стержень тянет груз влево-вниз:

$$x: \quad N_2\sin\alpha - T\cos\beta = 0, \qquad y: \quad N_2\cos\alpha - m_2 g - T\sin\beta = 0.$$

Три силы на правом грузе в сумме дают ноль — их векторы образуют замкнутый треугольник (рисунок 3).



Треугольник сил правого груза: $m_2\vec{g} + \vec{T} + \vec{N}_2 = 0$. Сила $\vec{N}_2$ отклонена от вертикали на α, сила $\vec{T}$ — от горизонтали на β.

4. Исключаем N_2 и T. Из проекции на x: $N_2 = T\cos\beta/\sin\alpha$. Подставим в проекцию на y и используем шаг 2:

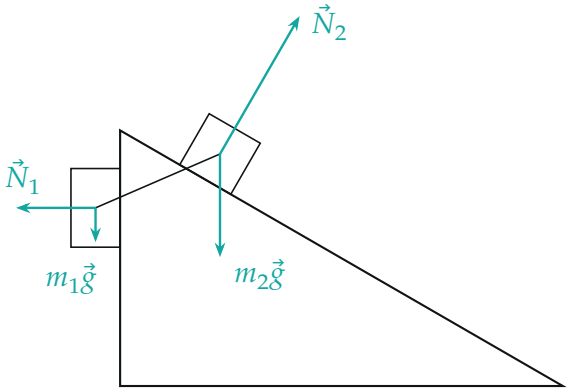
$$T\cos\beta\,\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = m_2 g + T\sin\beta = m_2 g + m_1 g,$$

$$T\cos\beta = (m_1 + m_2)\,g\,\operatorname{tg}\alpha.$$

Делим на $T\sin\beta = m_1 g$:

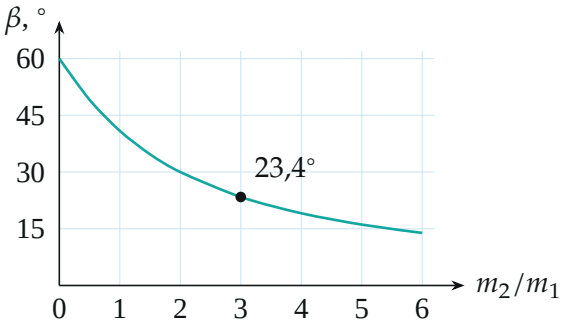
$$\operatorname{tg}\beta = \frac{m_1}{(m_1+m_2)\operatorname{tg}\alpha} = \frac{1}{4\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3}}{4}, \qquad \beta = \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{4} \approx 23{,}4°.$$

5. Второй способ: вся система целиком. Для системы «два груза + стержень» натяжение — внутренняя сила. Внешние: $m_1\vec{g}$, $m_2\vec{g}$, $\vec{N}_1$, $\vec{N}_2$ (рисунок 4). Проекция на y: $N_2\cos\alpha = (m_1+m_2)g$; на x: $N_1 = N_2\sin\alpha = (m_1+m_2)g\operatorname{tg}\alpha$. Левый груз по горизонтали: $N_1 = T\cos\beta$, по вертикали $T\sin\beta = m_1 g$ — снова $\operatorname{tg}\beta = \dfrac{m_1}{(m_1+m_2)\operatorname{tg}\alpha}$.



Система «грузы + стержень»: натяжение стержня внутреннее, внешние силы — тяжести и реакции опор.

6. Как угол зависит от отношения масс. $\operatorname{tg}\beta = \dfrac{\sqrt{3}}{1 + m_2/m_1}$ при $\alpha = 30°$ — рисунок 5. Чем тяжелее правый груз, тем сильнее он тянет стержень вниз по плоскости и тем положе стержень.



Угол стержня с горизонтом в зависимости от отношения масс при $\alpha = 30°$; точка — условие задачи.

Обратите внимание. Стержень растянут, а не сжат: иначе он толкал бы левый груз вниз-влево, и ничто не удержало бы его у гладкой стенки. Сила тяжести левого груза держится только вертикальной проекцией натяжения $T \sin\beta$.

Ответ:

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{m_1}{(m_1+m_2)\operatorname{tg}\alpha} = \frac{\sqrt{3}}{4}, \qquad \beta \approx 23{,}4^\circ.$$

Проверка. Ответ безразмерный, как и положено тангенсу. Предел $m_2 \to 0$: $\operatorname{tg}\beta = \operatorname{ctg}\alpha$, $\beta = 90^\circ - \alpha = 60^\circ$ — невесомый правый груз держится, только если стержень перпендикулярен плоскости, вдоль нормали, верно. Предел $m_2 \gg m_1$: $\beta \to 0$ — стержень горизонтален. Численно: $T\sin\beta = m_1 g$ и $T\cos\beta = 4m_1 g/\sqrt{3}$ дают $T \approx 2{,}52\,m_1 g$, $N_2 = 4m_1 g/\cos\alpha \approx 4{,}62\,m_1 g$ — треугольник на рисунке 3 замыкается.

Ответ. $\beta = \operatorname{arctg}\dfrac{m_1}{(m_1+m_2)\operatorname{tg}\alpha} = \operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{3}}{4} \approx 23{,}4^\circ.$