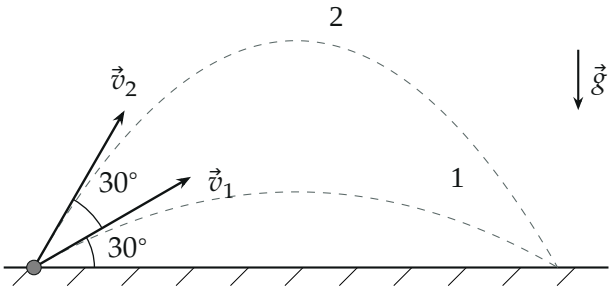
Два шарика на нити

Задача 1. [Курчатов 2018/19, 11 класс, задача 1] Два шарика, связанных легкой нитью, запускают с поверхности Земли с одинаковыми по модулю скоростями v_0 под разными углами: один шарик под углом 30° к горизонту, другой — 60°.

1. Найдите максимальное расстояние между шариками.
2. Какие значения может принимать угол между нитью и горизонтом?

Нить считать всегда натянутой, силами упругости пренебречь.

Комментарий. В условии задачи не хватает уточнения, что шарики выпущены из одной точки, летят в одной плоскости в одну сторону. Шарик, который упадет первым, остаётся на поверхности Земли. Данное уточнение распространялось дополнительно, однако могут встречаться решения в иных предположениях. Такие решения будут оцениваться иначе, но исходя из 10 баллов за полностью правильное решение в предположениях участника.



Поясняющий рисунок: шарики 1 и 2 вылетают из одной точки под 30° и 60°; пунктир — их параболы.

▲ **Решение. Что происходит.** Сила упругости нити не учитывается, значит каждый шарик летит под действием одной силы тяжести, а нить — просто отрезок между шариками. Это задача на относительное движение в поле тяжести: у обоих шариков одно и то же ускорение $\vec{g}$, поэтому друг относительно друга они движутся равномерно и прямолинейно.

Пока летят оба, нить сохраняет направление и удлиняется пропорционально времени; после падения первого шарика второй «подлетает» к нему по своей параболе.

Обозначения. $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ — начальные скорости шариков 1 (30°) и 2 (60°), $|\vec{v}_1| = |\vec{v}_2| = v_0$; $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$ — их радиус-векторы от точки старта O; $\vec{L} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ — вектор нити; φ — угол нити с горизонтом; τ — время полёта шарика 1; P — точка его падения. Ось x — горизонтально по полёту, y — вверх.

Пункт 1.

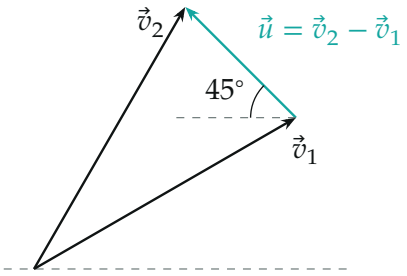
1. Нить в системе отсчёта шарика 1. Кинематика равноускоренного движения для каждого шарика:

$$\vec{r}_1 = \vec{v}_1 t + \frac{\vec{g}t^2}{2}, \qquad \vec{r}_2 = \vec{v}_2 t + \frac{\vec{g}t^2}{2} \quad \Rightarrow \quad \vec{L} = (\vec{v}_2 - \vec{v}_1)\, t = \vec{u}\, t.$$

Слагаемые с $\vec{g}$ сократились: относительная скорость $\vec{u}$ постоянна. Её модуль — основание равнобедренного треугольника с боковыми сторонами v_0 и углом $60° - 30° = 30°$ между ними (рисунок 2):

$$u = 2v_0 \sin 15°.$$

В проекциях: $u_x = v_0(\cos 60° - \cos 30°) = -\frac{\sqrt{3}-1}{2} v_0$, $u_y = v_0(\sin 60° - \sin 30°) = +\frac{\sqrt{3}-1}{2} v_0$; модуль $u = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}} v_0$ — то же самое, ведь $2\sin 15° = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}$.



Относительная скорость $\vec{u} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$: постоянна и наклонена к горизонту

под 45°.

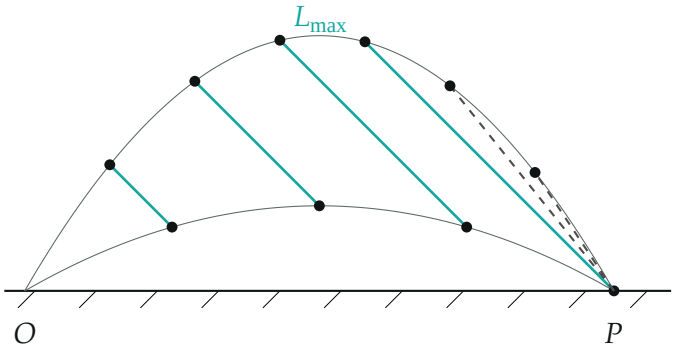
2. Пока летят оба. Длина нити $L = ut$ растёт линейно; это верно, пока шарик 1 в полёте. Время его полёта из $y_1 = v_0 \sin 30^\circ\, t - gt^2/2 = 0$:

$$\tau = \frac{2v_0 \sin 30^\circ}{g} = \frac{v_0}{g}.$$

Шарик 2 летит дольше ($2v_0 \sin 60^\circ/g = \sqrt{3}\, v_0/g$), так что первым падает шарик 1.

3. После падения шарика 1. Дальности полёта под 30° и 60° одинаковы ($\sin 60^\circ = \sin 120^\circ$): $l = \frac{v_0^2 \sin 60^\circ}{g} = \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{v_0^2}{g}$. Значит шарик 2 летит прямо в точку P, где лежит шарик 1, и расстояние между ними от $t = \tau$ до $t = \sqrt{3}\, v_0/g$ только убывает до нуля (рисунок 3). Наибольшее расстояние — в момент τ:

$$L_{\max} = u\tau = 2v_0 \sin 15^\circ \cdot \frac{v_0}{g} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}\,\frac{v_0^2}{g} \approx 0{,}518\,\frac{v_0^2}{g}.$$



Положения нити через $0{,}25\, v_0/g$*: пока летят оба, нить (бирюза) параллельна себе и растёт; после падения шарика 1 в P — хорды (пунктир) от P к шарику 2.*

Пункт 2.

4. Угол, пока летят оба. Нить направлена по $\vec{u}$, а у $\vec{u}$ проекции равны

по модулю: $|u_y| = |u_x|$. Значит

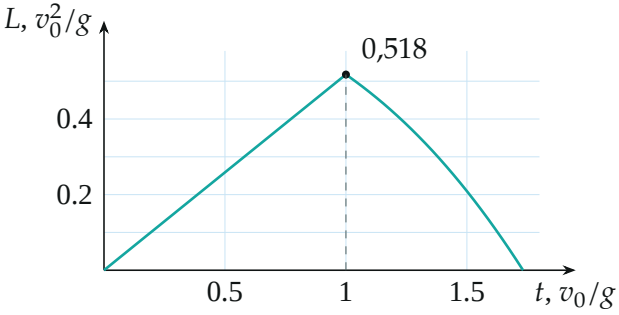
$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{|u_y|}{|u_x|} = 1, \qquad \varphi = 45^\circ$$

всё время от старта до момента τ (шарик 2 выше и левее шарика 1).

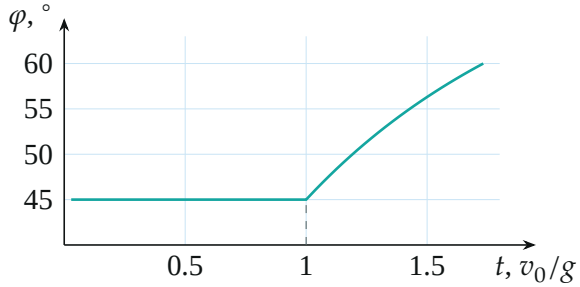
5. Угол после падения шарика 1. Нить — хорда параболы шарика 2 от точки P. Уравнение параболы шарика 2 через дальность l: $y = x\operatorname{tg}60^\circ\,(1 - \frac{x}{l})$ (нули при $x = 0$ и $x = l$). Наклон хорды к точке $P(l;0)$:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{l-x} = \operatorname{tg}60^\circ \cdot \frac{x}{l}.$$

В момент τ шарик 2 находится при $x = v_0\cos 60^\circ \cdot \tau = \frac{v_0^2}{2g}$, то есть $\frac{x}{l} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ и $\operatorname{tg}\varphi = 1$ — угол непрерывно продолжает 45°. Дальше x растёт до l, и $\operatorname{tg}\varphi$ монотонно растёт до $\operatorname{tg}60^\circ$: в момент падения хорда превращается в касательную, а по симметрии параболы шарик падает под тем же углом 60°, под каким вылетел (рисунок 4).



Расстояние между шариками от времени (python): растёт линейно до $\tau = v_0/g$, затем убывает до нуля.



Угол нити с горизонтом: 45°, *пока летят оба, затем растёт до* 60°.

Обратите внимание. Наибольшее расстояние — не в верхней точке какой-либо траектории, а в момент падения первого шарика: до него $L = ut$ растёт без остановки. Угол 60° — предельное значение при $t \to \sqrt{3}\,v_0/g$, когда длина нити стремится к нулю.

Проверка. Размерность: v_0^2/g — метры. Второй способ: в момент τ шарик 1 в $P(\frac{\sqrt{3}}{2}, 0)$, шарик 2 в $(\frac{1}{2};\ \frac{\sqrt{3}-1}{2})$ (в единицах v_0^2/g); разности координат $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$ по обеим осям — угол 45° и длина $\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}$, совпадает. Предел: при равных углах ($\vec{v}_1 = \vec{v}_2$) $u = 0$ и шарики летят вместе. Смысл: в однородном поле тяжести относительное движение тел равномерное, и вся задача сводится к треугольнику скоростей.

Ответ. 1) $L_{\max} = \dfrac{2v_0^2 \sin 15°}{g} = \dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}\,\dfrac{v_0^2}{g} \approx 0{,}52\,\dfrac{v_0^2}{g}$; 2) $45° \le \varphi \le 60°$ (45°, пока летят оба шарика, затем угол растёт до 60°).