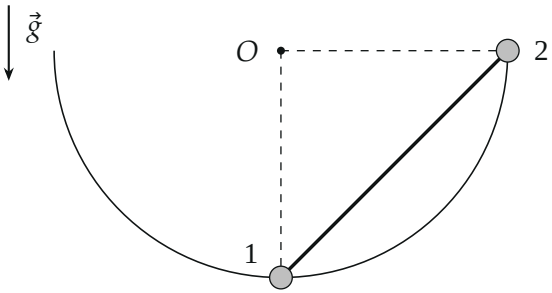
Бусинки на полуокружности

Задача 2. [Курчатов 2018/19, 11 класс, задача 2] Из тонкой проволоки согнута полуокружность с центром в точке O и радиусом $R = 0{,}5$ м. Полуокружность неподвижно закреплена в вертикальной плоскости. По проволоке могут скользить без трения маленькие бусинки 1 и 2, соединённые жёстким невесомым стержнем. Отношение масс бусинок $k = m_1/m_2 = 2$. При движении стержень может свободно поворачиваться вокруг точек крепления к бусинкам. В начальном положении бусинки 1 и 2 находятся на концах вертикального и горизонтального радиусов. Стержень с бусинками отпускают без толчка. Найдите максимальную скорость V бусинки 1 при дальнейшем движении. Бусинки считайте материальными точками. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2. Ответ выразите в м/с и округлите до сотых.



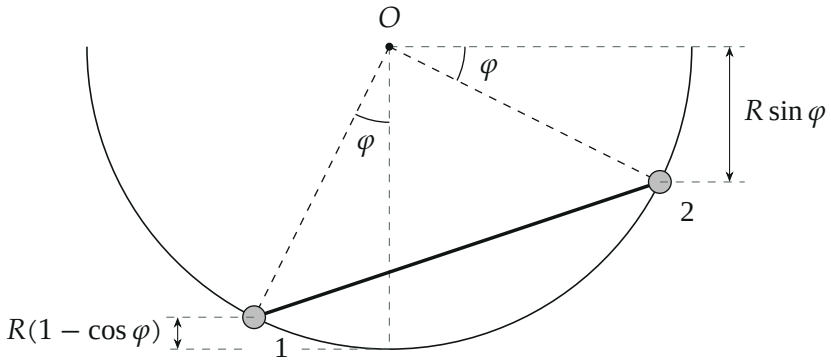
▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на закон сохранения энергии в системе со связью. Бусинка 2 справа тянет систему вниз, бусинка 1 внизу пока не мешает — стержень начинает поворачиваться по часовой стрелке: бусинка 2 опускается, тяжёлая бусинка 1 поднимается. Обе бусинки лежат на окружности, а расстояние между ними задано стержнем, поэтому треугольник $O12$ жёсткий и вся система просто поворачивается вокруг O. Скорость максимальна там, где потенциальная энергия минимальна, — в положении равновесия.

Обозначения. φ — угол поворота радиусов $O1$ и $O2$ от начального положения; V_1, V_2 — скорости бусинок; $m_2 = m$, $m_1 = km$; высоты отсчитываем от точки O вверх. Трения нет, нормальные силы проволоки

перпендикулярны скоростям — работы не совершают; стержень невесом и жёсткий — его силы в сумме работы тоже не совершают.

1. Связь скоростей. Стержень длиной $R\sqrt{2}$ стягивает дугу 90° при любом положении: угол $\angle 1O2$ всегда прямой, и система поворачивается вокруг O как целое с угловой скоростью ω. Значит $V_1 = V_2 = \omega R$. Тот же результат даёт условие нерастяжимости стержня: скорости направлены по касательным, перпендикулярно радиусам, а стержень — гипотенуза равнобедренного прямоугольного треугольника $O12$, поэтому обе скорости образуют со стержнем углы 45° (рисунок 3), и равенство проекций $V_1 \cos 45° = V_2 \cos 45°$ даёт $V_1 = V_2 = V$.

2. Высоты. После поворота на φ (рисунок 2) бусинка 1 поднялась на $R(1 - \cos\varphi)$, а бусинка 2 опустилась на $R \sin\varphi$.

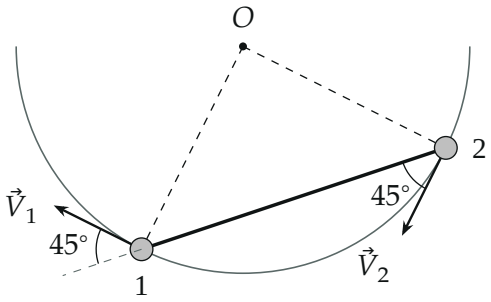


Положение после поворота на угол φ (нарисовано при $\varphi = \varphi_0 \approx 26{,}6°$): бусинка 1 поднялась, бусинка 2 опустилась.

3. Закон сохранения энергии системы «бусинки + стержень» от начального положения до положения φ. Внешние силы, кроме тяжести, работы не совершают:

$$\frac{(m_1 + m_2)V^2}{2} = m_2 g R \sin\varphi - m_1 g R(1 - \cos\varphi),$$

$$V^2 = \frac{2gR}{k+1} f(\varphi), \qquad f(\varphi) = \sin\varphi + k\cos\varphi - k.$$



Скорости бусинок направлены по касательным и образуют со стержнем углы 45°: проекции на стержень равны, значит $V_1 = V_2$.

4. Максимум $f(\varphi)$. Приравниваем производную нулю:

$$f'(\varphi) = \cos\varphi - k\sin\varphi = 0 \quad \Rightarrow \quad \operatorname{tg}\varphi_0 = \frac{1}{k} = \frac{1}{2}, \qquad \varphi_0 \approx 26{,}6^\circ.$$

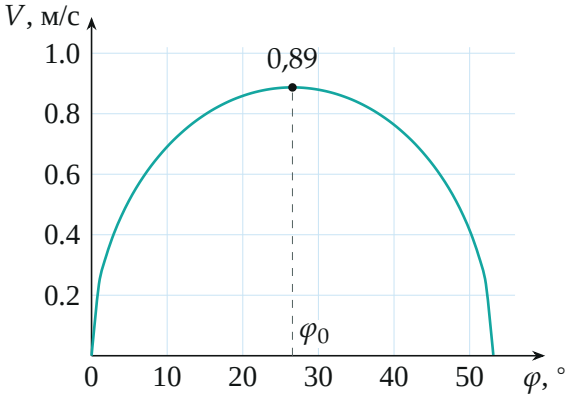
При этом $\sin\varphi_0 = \frac{1}{\sqrt{k^2+1}}$, $\cos\varphi_0 = \frac{k}{\sqrt{k^2+1}}$ и

$$f(\varphi_0) = \frac{1+k^2}{\sqrt{k^2+1}} - k = \sqrt{k^2+1} - k = \sqrt{5} - 2 \approx 0{,}236.$$

Второй способ — через равновесие: максимум кинетической энергии там, где сумма моментов сил тяжести относительно O равна нулю, $m_1 g R\sin\varphi = m_2 g R\cos\varphi$, — то же $\operatorname{tg}\varphi_0 = 1/k$.

5. Ответ числом.

$$V = \sqrt{\frac{2gR\,(\sqrt{k^2+1}-k)}{k+1}} = \sqrt{\frac{2\cdot 10\cdot 0{,}5\cdot 0{,}236}{3}} \approx 0{,}89 \text{ м/с}.$$



Скорость бусинки 1 от угла поворота (python): максимум 0,887 м/с при $\varphi_0 = 26{,}6°$; при $\varphi = 2\varphi_0 \approx 53°$ система останавливается и движется обратно.

Обратите внимание. Максимальна скорость не в нижней точке какой-то бусинки, а в положении равновесия всей системы: дальше момент силы тяжести тяжёлой бусинки 1 больше и тормозит поворот. Бусинки колеблются между $\varphi = 0$ и $\varphi = 2\varphi_0 \approx 53°$ и не сходят с полуокружности.

Проверка. Размерность: $\sqrt{gR}$ — м/с. Предел $k \to 0$ (бусинка 1 невесома): $V^2 \to 2gR\sin\varphi$, при $\varphi = 90°$ — $2gR$, свободное «падение» бусинки 2 на R, верно. Предел $k \to \infty$: $\sqrt{k^2+1} - k \approx \frac{1}{2k} \to 0$, тяжёлая бусинка не даёт системе двигаться. Смысл: энергия, освобождённая лёгкой бусинкой, делится на обе, а тяжёлая забирает её часть на подъём.

Ответ. $V = \sqrt{\dfrac{2gR\left(\sqrt{k^2+1} - k\right)}{k+1}} \approx 0{,}89$ м/с.