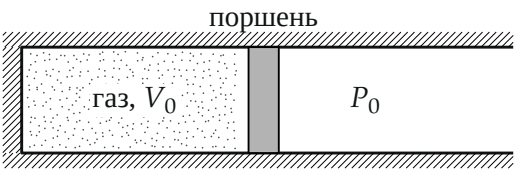
Газ под поршнем при скачках давления

Задача 3. [Курчатов 2018/19, 11 класс, задача 3] Длинный горизонтальный цилиндр с одной стороны наглухо закрыт, а с другой открыт в окружающую среду. В цилиндре может двигаться без трения тяжёлый поршень. Между поршнем и закрытым торцом цилиндра находится идеальный одноатомный газ, занимающий объём $V_0 = 1{,}5$ л при внешнем давлении P_0. Внешнее давление мгновенно уменьшают до значения $P_1 = (1 - \alpha)P_0$, где $\alpha = 0{,}2$, и поддерживают его постоянным до полной остановки поршня и перехода газа в новое состояние равновесия с давлением P_1. Далее внешнее давление скачком увеличивают до начального значения P_0 и поддерживают его постоянным до перехода газа в конечное равновесное состояние, в котором газ занимает некоторый объём V_K при давлении P_0. Считая, что стенки цилиндра и поршень не проводят тепло, найдите разность объёмов $\Delta V = V_K - V_0$. Числовой ответ выразите в кубических сантиметрах.



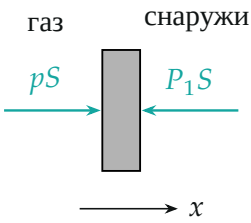
Поясняющий рисунок: газ между закрытым торцом и поршнем; справа цилиндр открыт, давление снаружи P_0, затем P_1, затем снова P_0.

▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на первое начало термодинамики для необратимого (нестатического) процесса. Внешнее давление меняется скачком, тяжёлый поршень разгоняется, проскакивает положение равновесия и колеблется; колебания затухают, их энергия переходит во внутреннюю энергию газа. Промежуточные состояния неравновесные, адиабату $PV^{5/3} = \text{const}$ применять нельзя. Зато известны начальное и конечное состояния (поршень покоится, давление газа равно внешнему) и работа внешней среды: она давит постоянным давлением, и её работа — $P \cdot \Delta V$. Закон сохранения энергии для системы «газ + поршень» связывает эти состояния. После двух скачков газ не возвращается в исходный объём: каждый необратимый шаг немного нагревает газ.

Обозначения. ν — количество газа; T_0, T_1, T_K — температуры в состояниях 0 (P_0, V_0), 1 (P_1, V_1) и K (P_0, V_K); S — площадь поршня; $U = \frac{3}{2}\nu RT = \frac{3}{2}PV$ — внутренняя энергия одноатомного газа в равновесном состоянии.

1. Энергия системы «газ + поршень» при переходе $0 \to 1$**.** В начале и в конце поршень покоится, его кинетическая энергия равна нулю. Тепло не подводится: стенки и поршень не проводят тепло. Трения нет. Энергию системы меняет только внешняя среда: она давит на поршень силой P_1S против его движения (рисунок 2), и при сдвиге поршня, увеличивающем объём газа на $V_1 - V_0$, совершает работу $-P_1(V_1 - V_0)$. Внутренние силы (газ на поршень и поршень на газ) энергию системы не меняют. Значит

$$\frac{3}{2}P_1V_1 - \frac{3}{2}P_0V_0 = -P_1(V_1 - V_0).$$



Горизонтальные силы, действующие на поршень: газ давит с давлением p (во время колебаний оно меняется), снаружи — постоянное P_1.

Отсюда $5P_1V_1 = 3P_0V_0 + 2P_1V_0$, то есть

$$V_1 = V_0\,\frac{3P_0 + 2P_1}{5P_1} = V_0\,\frac{5 - 2\alpha}{5(1-\alpha)} = 1{,}5 \cdot \frac{4{,}6}{4} = 1{,}725 \text{ л}.$$

Газ расширился, его температура упала: $T_1/T_0 = P_1V_1/(P_0V_0) = \frac{5-2\alpha}{5} = 0{,}92$.

2. Переход $1 \to K$**.** Теперь внешнее давление P_0, поршень движется внутрь, объём уменьшается на $V_1 - V_K$, и среда совершает положитель-

ную работу $P_0(V_1 - V_K)$:

$$\frac{3}{2}P_0V_K - \frac{3}{2}P_1V_1 = P_0(V_1 - V_K) \quad \Rightarrow \quad 5P_0V_K = 3P_1V_1 + 2P_0V_1,$$

$$V_K = V_1\,\frac{3P_1 + 2P_0}{5P_0} = V_1\,\frac{5 - 3\alpha}{5} = 1{,}725 \cdot 0{,}88 = 1{,}518 \text{ л}.$$

3. Разность объёмов. Подставляем V_1:

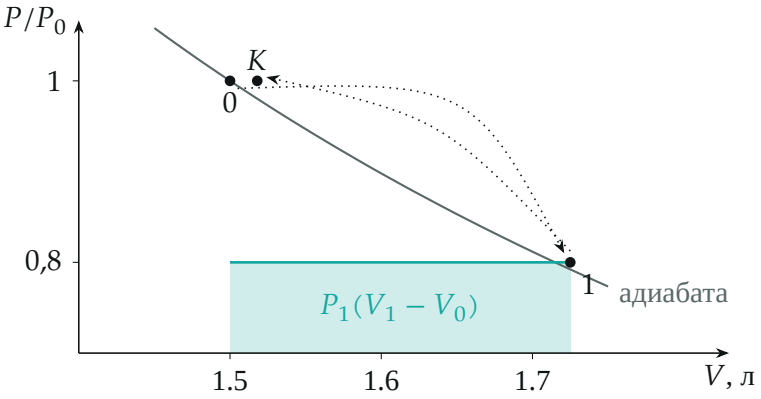
$$V_K = V_0\,\frac{(5 - 2\alpha)(5 - 3\alpha)}{25(1 - \alpha)},$$

$$\Delta V = V_K - V_0 = V_0\,\frac{(5 - 2\alpha)(5 - 3\alpha) - 25(1 - \alpha)}{25(1 - \alpha)}.$$

В числителе $25 - 25\alpha + 6\alpha^2 - 25 + 25\alpha = 6\alpha^2$, поэтому

$$\Delta V = \frac{6\alpha^2 V_0}{25(1 - \alpha)} = \frac{6 \cdot 0{,}04 \cdot 1500 \text{ см}^3}{25 \cdot 0{,}8} = 18 \text{ см}^3.$$

Знак плюс: газ в конце занимает больший объём, чем вначале, при том же давлении — он нагрелся: $T_K/T_0 = V_K/V_0 = 1{,}012$.

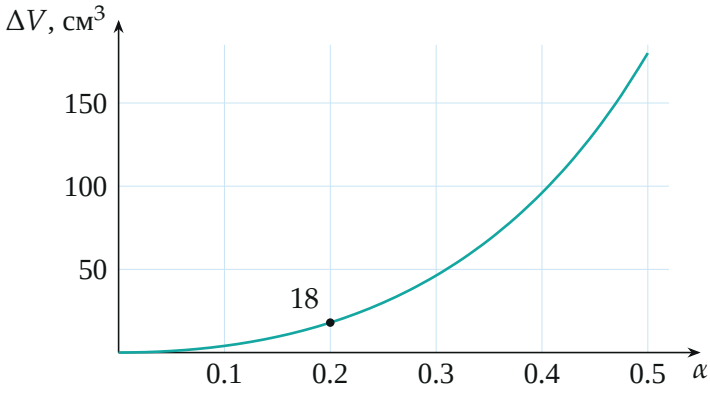


Состояния 0, 1, K на диаграмме P–V (точечные стрелки — неравновесные переходы, у них нет линии на диаграмме). Бирюзовая площадь — работа газа

против среды $P_1(V_1 - V_0)$. Точка 1 правее адиабаты: при резком расширении газ остывает меньше, чем при медленном.

Обратите внимание. Нельзя считать переходы адиабатами $PV^{5/3} = \text{const}$: адиабата верна для медленного (квазистатического) процесса, а здесь поршень колеблется. По адиабате газ вернулся бы точно в V_0 и ΔV было бы нулём. Работа газа здесь — не $\int p\,dV$ по неизвестному p, а работа внешнего постоянного давления: кинетическая энергия поршня в начале и в конце нулевая.

Проверка. Размерность: ΔV — объём. Предел $\alpha \to 0$: $\Delta V \approx \frac{6}{25}\alpha^2 V_0$ — второго порядка малости, как и положено необратимости (при малом скачке процесс почти обратим, рисунок 4). Знак: $\Delta V > 0$ при любом α — газ после цикла нагрет, энтропия выросла. Численно (python): $V_1 = 1{,}725$ л, $V_K = 1{,}518$ л, разность 18 см^3.



$\Delta V(\alpha) = \frac{6\alpha^2 V_0}{25(1-\alpha)}$ при $V_0 = 1{,}5$ л: при малых скачках растёт как α^2; точка — наш случай $\alpha = 0{,}2$.

Смысл: два резких скачка давления туда и обратно не возвращают газ в исходное состояние — колебания поршня затухают и греют газ.

Ответ. $\Delta V = \dfrac{6\alpha^2 V_0}{25(1-\alpha)} = 18$ см^3.