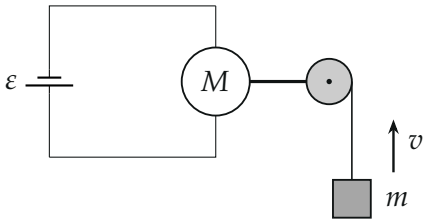
Двигатель поднимает груз

Задача 4. [Курчатов 2018/19, 11 класс, задача 4] Электродвигатель постоянного тока подключён к батарее с ЭДС $\varepsilon = 10$ В. На вал двигателя намотана длинная лёгкая нить с грузом массы $m = 0{,}1$ кг. При работе двигателя груз поднимается с постоянной скоростью $v = 8$ см/с. Найдите силу тока I, текущего по цепи в этом случае. Известно, что при полном затормаживании вала двигателя по цепи течёт ток $I_0 = 50$ мА. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2; потери энергии на трение не учитывайте. Числовой ответ выразите в миллиамперах.



Поясняющий рисунок: батарея, двигатель M, на валу нить с грузом m.

▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на закон сохранения энергии в цепи с двигателем. Работа батареи идёт на два дела: нагрев обмоток и проводов (джоулево тепло) и подъём груза. Когда вал заторможен, механической работы нет и вся работа батареи — тепло: по этому режиму находим сопротивление цепи. Во вращающемся двигателе ток меньше, чем при торможении, потому что в обмотке наводится ЭДС, направленная против тока батареи.

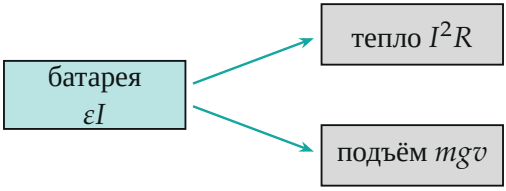
Обозначения. R — полное сопротивление цепи (обмотка, провода, батарея); Δt — малый промежуток времени, за который груз поднимается на $v\Delta t$; $\mathcal{E}_д$ — ЭДС, наведённая во вращающейся обмотке.

1. Сопротивление цепи — режим торможения. Вал не вращается, механической работы и наведённой ЭДС нет, работает закон Ома для полной цепи:

$$I_0 = \frac{\varepsilon}{R} \quad \Rightarrow \quad R = \frac{\varepsilon}{I_0} = \frac{10}{0{,}05} = 200 \text{ Ом}.$$

2. Баланс энергии за время Δt при подъёме. Работа сторонних сил батареи $\varepsilon I\Delta t$ равна теплу $I^2R\Delta t$ плюс работе двигателя (рисунок 2). Груз движется равномерно, его кинетическая энергия не меняется, и работа двигателя равна приросту потенциальной энергии груза $mgv\Delta t$ (трения нет, нить лёгкая):

$$\varepsilon I = I^2R + mgv.$$



Куда идёт мощность батареи: в тепло и в подъём груза.

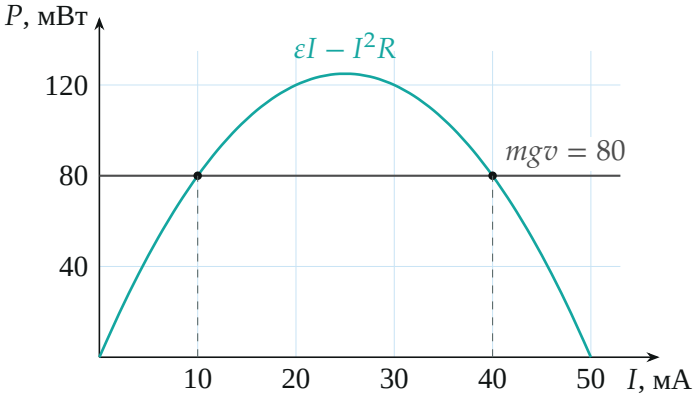
3. Квадратное уравнение. С $R = \varepsilon/I_0$:

$$I^2 - I_0 I + \frac{mgvI_0}{\varepsilon} = 0, \qquad I = \frac{I_0}{2}\left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{4mgv}{\varepsilon I_0}}\right).$$

Числа: $mgv = 0{,}1 \cdot 10 \cdot 0{,}08 = 0{,}08$ Вт, $\varepsilon I_0 = 0{,}5$ Вт, $\sqrt{1 - 0{,}64} = 0{,}6$:

$$I = 25\,(1 \pm 0{,}6)\text{ мА}: \qquad I_+ = 40\text{ мА}, \quad I_- = 10\text{ мА}.$$

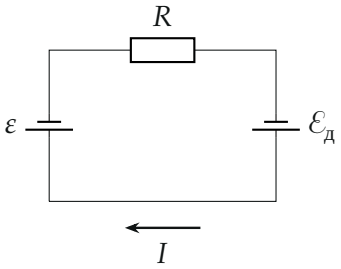
Механическая мощность двигателя $\varepsilon I - I^2R$ — парабола по I с максимумом $\frac{\varepsilon I_0}{4} = 125$ мВт при $I = I_0/2$ (рисунок 3); мощность 80 мВт она даёт при двух токах.



Механическая мощность двигателя от тока (python): пересечение с уровнем $mgv = 80$ мВт — при 10 и 40 мА.

4. Выбор корня. Двигатель — как батарея с ЭДС $\mathcal{E}_д$, включённая навстречу (рисунок 4): $\varepsilon - \mathcal{E}_д = IR$, а механическая мощность $\mathcal{E}_д I = mgv$. Наведённая ЭДС пропорциональна скорости вращения: при $v \to 0$ она исчезает и ток стремится к I_0. Этому режиму непрерывно соответствует корень со знаком «плюс»: тяжёлый груз, вал вращается медленно, $\mathcal{E}_д = \varepsilon - IR = 10 - 0{,}04 \cdot 200 = 2$ В — малая доля ЭДС батареи. Так решают и организаторы:

$$I = \frac{I_0}{2}\left(1 + \sqrt{1 - \frac{4mgv}{\varepsilon I_0}}\right) = 40 \text{ мА}.$$



Эквивалентная схема: сопротивление цепи R и наведённая в двигателе ЭДС $\mathcal{E}_д$, включённая против батареи.

Обратите внимание. Корень 10 мА тоже удовлетворяет балансу энергии: это другой двигатель (с иными обмоткой и радиусом вала), который при той же скорости груза почти не греется, $\mathcal{E}_д = 8$ В, КПД 80 %. Данных о самом двигателе в условии нет, и задуман режим, который при уменьшении скорости переходит в торможение с током I_0.

Проверка. Размерность: mgv/ε — Вт/В = А. Баланс при $I = 40$ мА: $\varepsilon I = 0{,}4$ Вт, $I^2R = 0{,}0016 \cdot 200 = 0{,}32$ Вт, $0{,}32 + 0{,}08 = 0{,}4$ Вт — сходится. Предел $v \to 0$: $I \to I_0$. Смысл: ток во вращающемся двигателе меньше тока торможения на столько, сколько «съедает» наведённая ЭДС.

Ответ. $I = \dfrac{I_0}{2}\left(1 + \sqrt{1 - \dfrac{4mgv}{\varepsilon I_0}}\right) = 40$ мА.