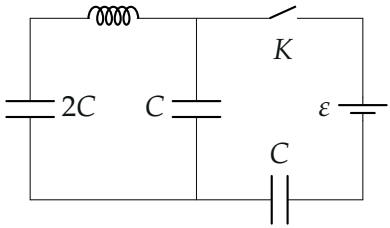
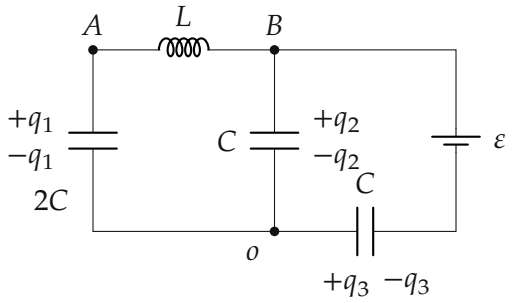
# Колебания в цепи с тремя конденсаторами

**Задача 5.** [Курчатов 2018/19, 11 класс, задача 5] Цепь состоит из ключа $K$, катушки, двух конденсаторов ёмкостью $C$, одного конденсатора ёмкостью $2C$ и батареи с ЭДС $\varepsilon = 12$ В. Сначала ключ разомкнут, конденсаторы не заряжены. После замыкания ключа в цепи возникают колебания токов и напряжений. Если пренебречь излучением и сопротивлением всех элементов цепи, то колебания можно считать гармоническими. В этом приближении найдите амплитуду $V_A$ колебаний напряжения на конденсаторе $2C$. Числовой ответ выразите в вольтах и округлите до десятых.




▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на колебательный контур с батареей. Сразу после замыкания ключа ток через катушку ещё нулевой, и батарея мгновенно заряжает два конденсатора $C$ (они вместе с ней образуют контур без катушки). Потом через катушку начинает заряжаться конденсатор $2C$; заряды на конденсаторах $C$ подстраиваются под него. Ключ к задаче — два соотношения, верные в любой момент: правило Кирхгофа для контура с батареей и равенство нулю заряда изолированного узла. Они выражают все напряжения через одно $V_1$, и дальше либо закон сохранения энергии в моменты остановки тока, либо уравнение колебаний.

**Обозначения.** $q_1$, $q_2$, $q_3$ — заряды конденсаторов $2C$, среднего $C$ и нижнего $C$, знаки обкладок — как на рисунке 2; $V_1 = \dfrac{q_1}{2C}$, $V_2 = \dfrac{q_2}{C}$, $V_3 = \dfrac{q_3}{C}$ — их напряжения; $o$ — нижний узел, $A$ и $B$ — концы катушки; $I$ — ток в катушке от $B$ к $A$; $L$ — индуктивность. Потенциал узла $o$ примем за ноль.




*Знаки зарядов на обкладках; узел $o$ соединён только с обкладками конденсаторов.*

**1. Правило Кирхгофа для контура «батарея — средний $C$ — нижний $C$».** В этом контуре нет катушки, сумма напряжений на конденсаторах равна ЭДС:

$$V_2 + V_3 = \varepsilon.$$

**2. Закон сохранения заряда для узла $o$.** Узел $o$ — это нижние обкладки конденсаторов $2C$ и $C$ и левая обкладка нижнего $C$; с остальной цепью он связан только через конденсаторы, поэтому его заряд остаётся нулевым, как до замыкания:

$$-q_1 - q_2 + q_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad 2V_1 + V_2 = V_3.$$

Из двух соотношений

$$V_2 = \frac{\varepsilon}{2} - V_1, \qquad V_3 = \frac{\varepsilon}{2} + V_1.$$

Сразу после замыкания $V_1 = 0$ (ток катушки нулевой, $2C$ не успел зарядиться), значит $V_2 = V_3 = \varepsilon/2 = 6$ В — это и есть мгновенная зарядка двух конденсаторов $C$.

**3. Способ 1: закон сохранения энергии от момента после зарядки до момента, когда ток катушки нулевой.** Напряжение $V_1$ экстремально, когда $\dot{q}_1 = I = 0$, — энергии катушки в этот момент нет. Работа

батареи — ЭДС на прошедший через неё заряд $q_3 - q_{30}$, где $q_{30} = C\varepsilon/2$:

$$\varepsilon C\Big(V_3 - \frac{\varepsilon}{2}\Big) = \frac{2CV_1^2}{2} + \frac{CV_2^2}{2} + \frac{CV_3^2}{2} - 2\cdot\frac{C}{2}\Big(\frac{\varepsilon}{2}\Big)^2.$$

Слева $\varepsilon C V_1$; справа $CV_1^2 + \frac{C}{2}(\frac{\varepsilon^2}{2} + 2V_1^2) - \frac{C\varepsilon^2}{4} = 2CV_1^2$. Получаем

$$2V_1^2 - \varepsilon V_1 = 0 \quad\Rightarrow\quad V_{\min} = 0, \quad V_{\max} = \frac{\varepsilon}{2}, \qquad V_A = \frac{V_{\max} - V_{\min}}{2} = \frac{\varepsilon}{4}.$$

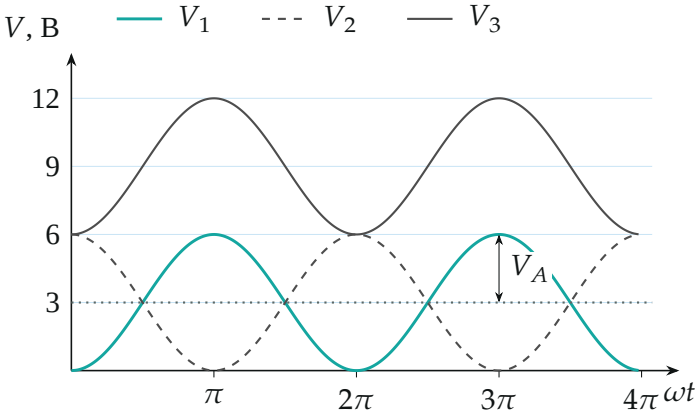
**4. Способ 2: уравнение колебаний.** Обходим контур $o \to A \to B \to o$ по второму правилу Кирхгофа. Потенциал $A$ равен $V_1$, потенциал $B$ равен $V_2$; ЭДС самоиндукции катушки равна разности потенциалов её концов: $L\dot{I} = V_2 - V_1$. Ток катушки заряжает $2C$: $I = 2C\dot{V}_1$. Тогда

$$2LC\,\ddot{V}_1 = \frac{\varepsilon}{2} - 2V_1 \quad\Rightarrow\quad \ddot{V}_1 = -\frac{1}{LC}\Big(V_1 - \frac{\varepsilon}{4}\Big).$$

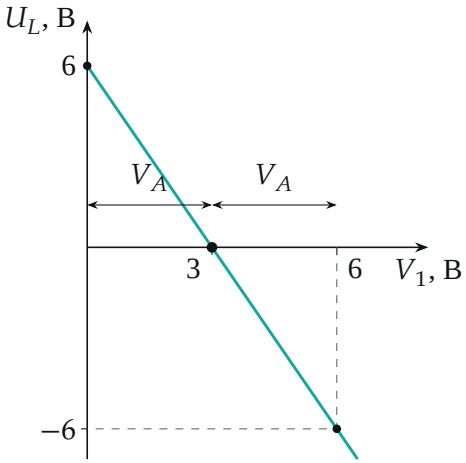
Это гармонические колебания с частотой $\omega = 1/\sqrt{LC}$ около $V_1 = \varepsilon/4$; начальные условия $V_1(0) = 0$, $\dot{V}_1(0) = 0$ дают

$$V_1(t) = \frac{\varepsilon}{4}\,(1 - \cos\omega t),$$

амплитуда $\varepsilon/4$ — то же, что способом 1 (рисунки 3 и 4).



*Напряжения на конденсаторах при $\varepsilon = 12$ В: $V_1$ на $2C$ (бирюза) колеблется от 0 до 6 В около 3 В; $V_2 = 6 - V_1$ (пунктир) и $V_3 = 6 + V_1$.*




*Напряжение на катушке $U_L = \varepsilon/2 - 2V_1$: нулю оно равно при $V_1 = 3$ В — это центр колебаний; от $V_1 = 0$ до $V_1 = 6$ В — симметрично.*

**5. Число.**

$$V_A = \frac{\varepsilon}{4} = \frac{12}{4} = 3{,}0 \text{ В}.$$

**Обратите внимание.** Энергию нельзя считать от момента замыкания ключа: мгновенная зарядка двух конденсаторов $C$ без сопротивления идёт с потерей энергии (на излучение, которым мы пренебрегаем только в колебаниях). Поэтому начальным состоянием в балансе служит момент после этой зарядки: $V_2 = V_3 = \varepsilon/2$, $W_0 = C\varepsilon^2/4$. Заряд изолированного узла $o$ — второе уравнение, без которого задача не решается.

**Проверка.** Размерность: $V_A$ — вольты. Знак: $V_2 = \varepsilon/2 - V_1 \geq 0$ при всех $V_1 \in [0; \varepsilon/2]$ — средний конденсатор не перезаряжается, а при $V_1 = \varepsilon/2$ полностью разряжается. Два независимых способа дали $\varepsilon/4$. Смысл: в равновесии ($V_1 = \varepsilon/4$) катушка без напряжения, а стартует $V_1$ от нуля — колебания идут с амплитудой, равной этому сдвигу.

**Ответ.** $V_A = \dfrac{\varepsilon}{4} = 3{,}0$ В.