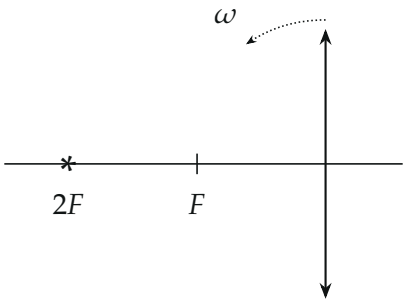
Поворачивающаяся линза

Задача 6. [Курчатов 2018/19, 11 класс, задача 6] На главной оптической оси тонкой собирающей линзы с фокусным расстоянием F расположен источник света. Расстояние от источника света до линзы $2F$. Линзу начинают поворачивать в плоскости, содержащей главную оптическую ось с постоянной угловой скоростью ω. Найдите скорость изображения источника света в момент, когда расстояние между ним и главной оптической осью равно F.



▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на построение изображения в тонкой линзе плюс кинематика. Источник S неподвижен, центр линзы O тоже, поворачивается только сама линза (и с ней её главная оптическая ось). Луч SO через оптический центр не преломляется при любом повороте, а изображение всегда лежит на этом луче. Значит, изображение S^* бегает по *неподвижной* прямой SO — по первоначальной оси, и его скорость — просто скорость изменения расстояния $L = OS^*$. Найдём $L(\varphi)$ по формуле линзы и продифференцируем по времени.

Обозначения. $\varphi = \omega t$ — угол поворота линзы (и её оси) от начального положения; a — расстояние от источника до плоскости линзы, b — от плоскости линзы до изображения (оба — вдоль новой оси); $L = OS^*$ — расстояние от центра линзы до изображения; ось x — по прямой SO от источника к линзе.

1. Где изображение при угле φ: формула тонкой линзы. Ось линзы повернулась на φ, а отрезок $SO = 2F$ остался на месте (рисунок 2).

Расстояние от источника до плоскости линзы — проекция SO на новую ось:

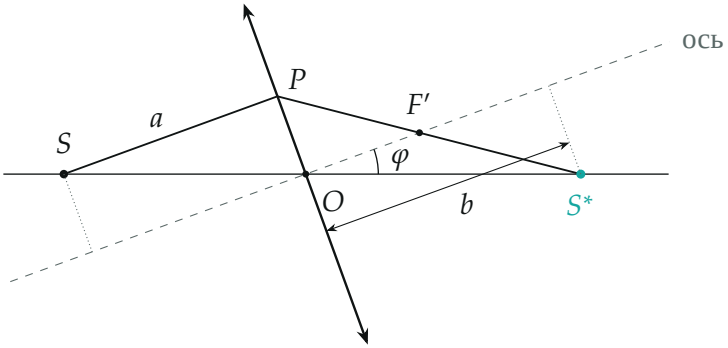
$$a = 2F\cos\varphi.$$

Изображение строим двумя лучами: луч через центр O идёт без преломления, луч, параллельный новой оси, после линзы проходит через фокус F'. Они пересекаются в S^* на прямой SO. Формула тонкой линзы (источник действительный, $a > F$ при малых φ):

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{F} \quad \Rightarrow \quad b = \frac{aF}{a - F} = \frac{2F\cos\varphi \cdot F}{2F\cos\varphi - F}.$$

b — проекция OS^* на новую ось, поэтому $L = b/\cos\varphi$:

$$L = \frac{2F}{2\cos\varphi - 1}.$$



Линза повёрнута на угол φ. Луч SO идёт без преломления; луч SP, параллельный новой оси (его длина равна a), после линзы проходит через фокус F'. Изображение S^* — на прямой SO; b — расстояние от плоскости линзы до S^* вдоль новой оси.

2. Скорость изображения: производная L по времени. Прямая SO неподвижна, изображение всё время на ней, значит, скорость $\vec{v}$ направлена вдоль SO, а её модуль — $|dL/dt|$. Дифференцируем $L(\varphi)$ как слож-

ную функцию, $\dot{\varphi} = \omega$:

$$v = \frac{dL}{dt} = 2F \cdot \frac{-(-2\sin\varphi)\,\dot{\varphi}}{(2\cos\varphi - 1)^2} = \frac{4F\omega\sin\varphi}{(2\cos\varphi - 1)^2}.$$

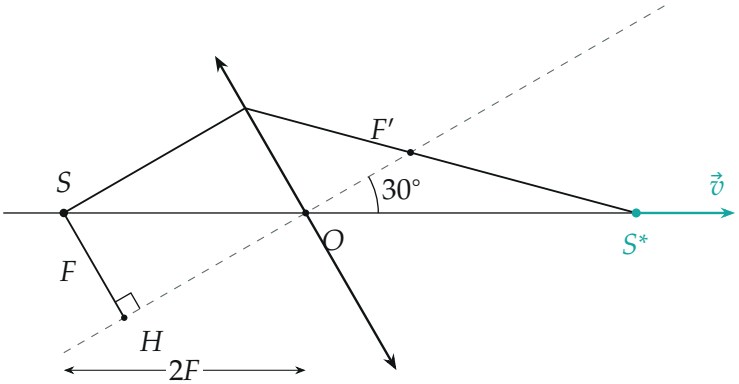
Знак плюс: при повороте $\cos\varphi$ уменьшается, L растёт — изображение уходит от линзы.

3. Момент из условия: источник на расстоянии F от оси. Расстояние от точки S до новой оси — перпендикуляр SH из треугольника SOH с гипотенузой $SO = 2F$ (рисунок 3):

$$SH = 2F\sin\varphi_0 = F \quad \Rightarrow \quad \sin\varphi_0 = \frac{1}{2}, \qquad \varphi_0 = 30^\circ.$$

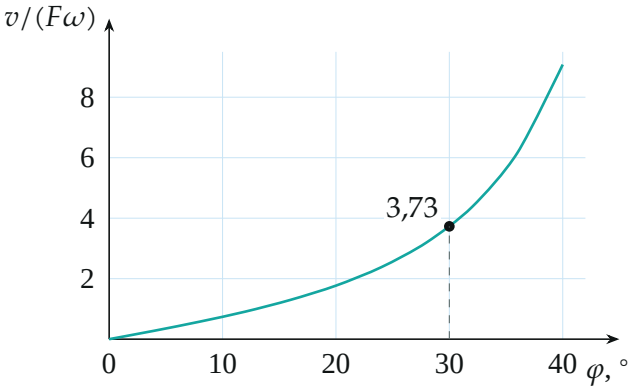
В этот момент $a = \sqrt{3}F$, $L = \dfrac{2F}{\sqrt{3}-1} \approx 2{,}73F$ и

$$v = \frac{4F\omega\cdot\frac{1}{2}}{(\sqrt{3}-1)^2} = \frac{2F\omega}{4-2\sqrt{3}} = \frac{F\omega}{2-\sqrt{3}} \approx 3{,}73\,F\omega.$$



Момент из условия, $\varphi_0 = 30^\circ$: перпендикуляр SH от источника до оси равен F. Изображение S^* на расстоянии $L \approx 2{,}73F$ от центра и уходит от линзы вдоль SO.

4. Как меняется скорость. График $v(\varphi)$ (рисунок 4) показывает, что скорость резко растёт: при $\varphi \to 60^\circ$ источник подходит к фокусу ($a = 2F\cos\varphi \to F$), изображение уходит на бесконечность, и $v \to \infty$.



Скорость изображения $v = 4F\omega\sin\varphi/(2\cos\varphi - 1)^2$ в зависимости от угла поворота, посчитана через 4°; точка — момент из условия.

Обратите внимание. Фраза «расстояние между ним и главной оптической осью» относится к источнику. Если отнести её к изображению, условие $L\sin\varphi_0 = F$ даёт $\sin\varphi_0 = \cos\varphi_0 - \frac{1}{2}$, $\sin 2\varphi_0 = \frac{3}{4}$, $\varphi_0 \approx 24{,}3^\circ$ и $v = F\omega/\sin\varphi_0 \approx 2{,}43\,F\omega$.

Ответ:

$$L = \frac{2F}{2\cos\varphi - 1}, \quad v = \frac{4F\omega\sin\varphi}{(2\cos\varphi - 1)^2},$$

$$\varphi_0 = 30^\circ: \quad v = \frac{F\omega}{2 - \sqrt{3}} \approx 3{,}73\,F\omega.$$

Проверка. Размерность: $F\omega$ — м/с. При $\varphi = 0$ линза не повёрнута: $L = 2F$ (источник в $2F$ даёт изображение в $2F$) и $v = 0$ — в первый момент изображение стоит, верно, потому что a меняется во втором порядке по φ. Численно (python, разность L при $\varphi = 30^\circ \pm 0{,}01^\circ$) производная совпала с $3{,}732\,F\omega$. Смысл: изображение движется не по окружности вместе с линзой, а по неподвижной прямой через источник и центр.

Ответ. $v = \dfrac{F\omega}{2 - \sqrt{3}} \approx 3{,}73\,F\omega$, направлена вдоль прямой «источник — центр линзы», от линзы.