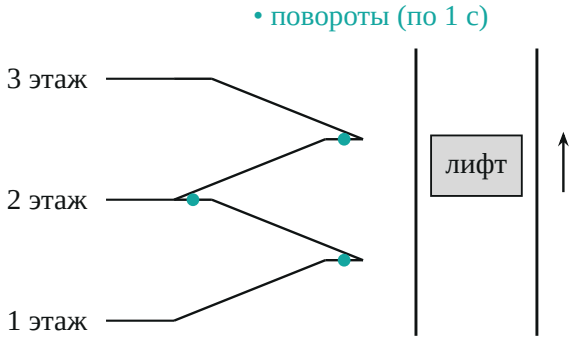
Петя и мама на лифте

Задача 1. [Курчатов 2018/19, 7 класс, задача 1] Возвращаясь домой вместе с мамой, мальчик Петя решил подниматься по лестнице пешком, а его мама поехала на лифте. До 2 этажа он добрался на 2 секунды быстрее, но добежав до 6, он устал и дальше поднимался по лестнице с той же скоростью, что и лифт. На каком этаже живут Петя с мамой, если известно, что они добрались одновременно? Чтобы подняться на этаж, нужно преодолеть два пролёта лестницы, а на переходы между пролётами мальчик тратил по одной секунде.



Поясняющий рисунок: на этаж — два пролёта, между ними поворот на площадке; ещё один поворот — на каждом промежуточном этаже.

▲ **Решение.** **Что происходит.** Это задача на равномерное движение и сложение времён. Время Пети складывается из времени на пролётах и времени поворотов, время лифта — из одинаковых промежутков на каждый этаж. Сравнение до 2 этажа связывает скорость Пети на первом участке со скоростью лифта, а равенство полных времён даёт номер этажа. Главная идея: неизвестное время лифта на этаж сократится само, потому что после 6 этажа Петя идёт «со скоростью лифта».

Обозначения. n — искомый этаж; t — время, за которое лифт поднимается на один этаж; t_1 — время, за которое Петя проходит два пролёта одного этажа до 6 этажа (без поворотов); $\tau = 1$ с — время одного поворота. После 6 этажа Петя проходит два пролёта за то же время t, что и лифт.

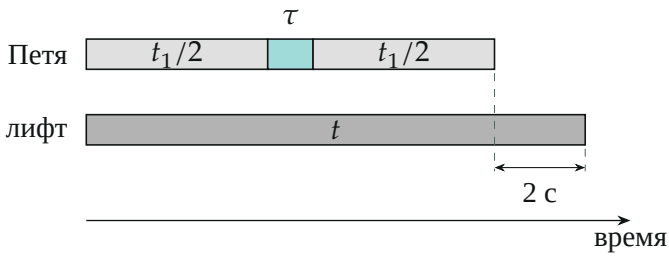
1. Сколько поворотов. С 1 на n этаж ведут $n-1$ этажей, то есть $2(n-1)$ пролётов. Повороты — между соседними пролётами, их на один меньше, чем пролётов:

$$N_{\text{пов}} = 2(n-1) - 1 = 2n - 3.$$

Например, с 1 на 2 этаж — два пролёта и один поворот; с 1 на 3 — четыре пролёта и три поворота (рисунок 1).

2. Подъём до 2 этажа. Петя тратит $t_1 + \tau$ (два пролёта и один поворот), лифт — t, и Петя быстрее на 2 с (рисунок 2):

$$t_1 + \tau = t - 2\text{ с} \quad \Rightarrow \quad t_1 = t - 3\text{ с}.$$

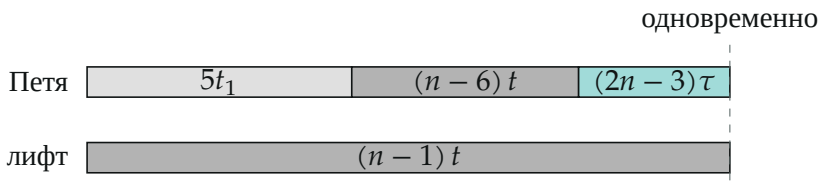


С 1 на 2 этаж: Петя — пролёт, поворот, пролёт; лифт — один промежуток t, на 2 с длиннее.

3. Полное время Пети. До 6 этажа — 5 этажей по t_1, после 6 — $(n-6)$ этажей по t, и все $2n-3$ поворотов:

$$T_{\text{П}} = 5t_1 + (n-6)\,t + (2n-3)\,\tau.$$

Полное время лифта $T_{\text{л}} = (n-1)\,t$ (рисунок 3).



Из чего складываются полные времена (повороты собраны в одну полосу); правые концы совпадают.

4. Добрались одновременно. Приравниваем $T_П = T_л$ и подставляем $t_1 = t - 3$ с, $\tau = 1$ с (время — в секундах):

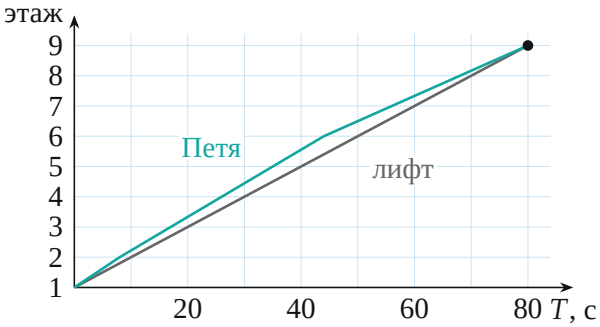
$$5(t-3) + (n-6)\,t + (2n-3) = (n-1)\,t.$$

Раскрываем скобки: $-t - 18 + 2n = -t$. Время t сократилось, и

$$2n = 18, \qquad n = 9.$$

Обратите внимание. Поворотов не $2(n-1)$, а $2n-3$: на этаже, куда пришёл, Петя уже не поворачивает. Именно эта единица и даёт целый ответ.

Проверка. Возьмём для примера $t = 10$ с, тогда $t_1 = 7$ с. Петя: до 2 этажа $7 + 1 = 8$ с (лифт — 10 с, на 2 с быстрее, как в условии); каждый следующий этаж до 6 — поворот на площадке, два пролёта и поворот между ними, $1 + 7 + 1 = 9$ с, до 6 этажа $8 + 4 \cdot 9 = 44$ с; этажи с 6 по 9 — по $1 + 10 + 1 = 12$ с, всего $44 + 36 = 80$ с. Лифт: $8 \cdot 10 = 80$ с — совпало (рисунок 4). С другим t ответ тот же, потому что t сократилось. Смысл: выигрыш Пети на первых этажах ровно съедают повороты на верхних, где он идёт не быстрее лифта.



Этаж от времени при $t = 10$ с: Петя (бирюза) до 6 этажа впереди, дальше теряет по 2 с на этаже.

Ответ. На 9 этаже.