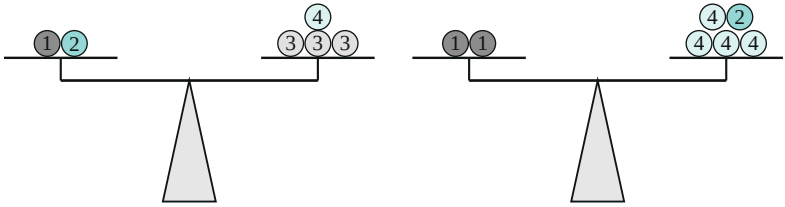
Весы: баклажан, кабачок, картофель

Задача 2. [Курчатов 2018/19, 7 класс, задача 2] Вася нашёл дома весы и решил поэкспериментировать. Он выяснил, что один баклажан и один кабачок весят столько же, сколько три картофелины и одна морковка, а два баклажана столько же, сколько четыре морковки и один кабачок. Оказалось также, что пять морковок весят больше, чем кабачок и две картофелины, но меньше, чем два кабачка и одна картофелина. Сколько, по меньшей мере, ему надо взять баклажанов, чтобы перевесить картофелину, кабачок и две морковки?



$m_1 + m_2 = 3m_3 + m_4$ $\qquad$ $2m_1 = 4m_4 + m_2$

Поясняющий рисунок: два равновесия из условия; 1 — баклажан, 2 — кабачок, 3 — картофелина, 4 — морковка.

▲ **Решение.** **Что происходит.** Весы в равновесии — массы на чашах равны, перевес — масса на опустившейся чаше больше. Каждое взвешивание переводим в равенство или неравенство масс. Двух равенств хватает, чтобы выразить массы кабачка и картофелины через массу баклажана, а два неравенства зажимают массу баклажана в узком промежутке. Внутри этого промежутка и проверяем, сколько баклажанов нужно. Класс задачи: система уравнений и неравенств, одна величина — единица измерения.

Обозначения. m_1, m_2, m_3, m_4 — массы баклажана, кабачка, картофелины и морковки. Все овощи одного вида одинаковы. Массу морковки примем за единицу, $m_4 = 1$: ответ — число баклажанов — от выбора единицы массы не зависит, а остальные массы станут просто числами.

1. Два равновесия. По рисунку 1:

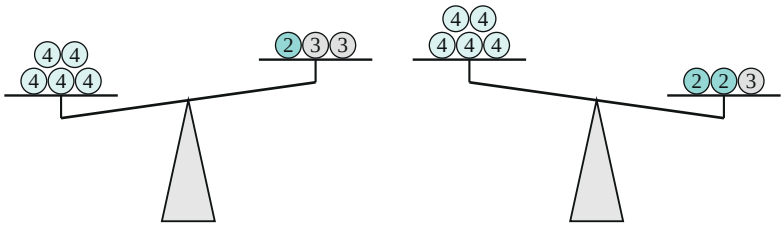
$$m_1 + m_2 = 3m_3 + 1, \qquad 2m_1 = 4 + m_2.$$

Из второго равенства $m_2 = 2m_1 - 4$; подставим в первое: $3m_1 - 4 = 3m_3 + 1$, откуда

$$m_2 = 2m_1 - 4, \qquad m_3 = m_1 - \frac{5}{3}.$$

2. Два перевеса. Пять морковок тяжелее кабачка с двумя картофелинами, но легче двух кабачков с картофелиной (рисунок 2):

$$m_2 + 2m_3 < 5 < 2m_2 + m_3.$$



$5m_4 > m_2 + 2m_3$ $\qquad$ $5m_4 < 2m_2 + m_3$

Два перевеса из условия: опускается более тяжёлая чаша.

Подставим m_2 и m_3 из пункта 1. Левое неравенство: $2m_1 - 4 + 2m_1 - \frac{10}{3} < 5$, то есть $4m_1 < \frac{37}{3}$. Правое: $5 < 4m_1 - 8 + m_1 - \frac{5}{3}$, то есть $5m_1 > \frac{44}{3}$. Вместе

$$\frac{44}{15} < m_1 < \frac{37}{12}, \qquad 2{,}93 < m_1 < 3{,}08.$$

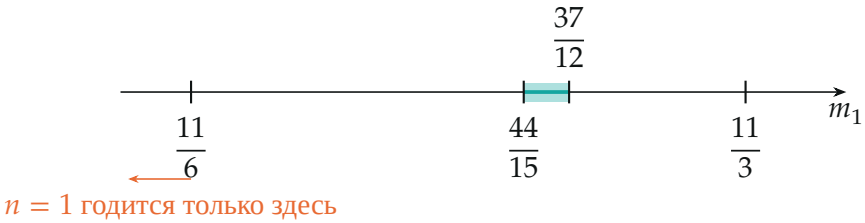
Масса баклажана — примерно три морковки, и известна она лишь в этих пределах (рисунок 3).

3. Условие перевеса. Берём n баклажанов. Они перевешивают картофелину, кабачок и две морковки, если

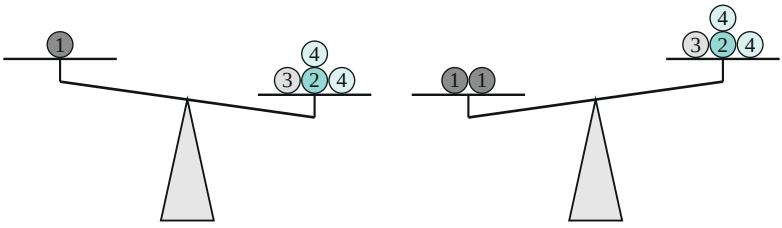
$$n\,m_1 > m_3 + m_2 + 2 = \left(m_1 - \frac{5}{3}\right) + (2m_1 - 4) + 2 = 3m_1 - \frac{11}{3}.$$

Перевес нужен при любой массе баклажана из найденного промежутка — иначе Вася не может быть уверен в результате.

4. Перебор n**.** При $n = 1$: $m_1 > 3m_1 - \frac{11}{3}$, то есть $m_1 < \frac{11}{6} \approx 1{,}83$ — противоречит $m_1 > 2{,}93$: один баклажан легче. При $n = 2$: $2m_1 > 3m_1 - \frac{11}{3}$, то есть $m_1 < \frac{11}{3} \approx 3{,}67$ — выполняется для всего промежутка $m_1 < 3{,}08$ (рисунки 3 и 4).



Возможные массы баклажана (бирюза, в массах морковки). Один баклажан перевесил бы только при $m_1 < 11/6$, два — при $m_1 < 11/3$: весь промежуток левее этой черты.



$n = 1$: легче $n = 2$: тяжелее

Картофелина, кабачок и две морковки против одного и двух баклажанов.

Обратите внимание. Перевес должен получиться при любой допустимой массе баклажана, поэтому сравниваем не одно число, а весь промежуток $(\frac{44}{15}; \frac{37}{12})$ с границами $\frac{11}{6}$ и $\frac{11}{3}$.

Проверка. Возьмём $m_1 = 3$ (внутри промежутка): $m_2 = 2$, $m_3 = \frac{4}{3}$. Равенства: $3 + 2 = 4 + 1$ и $6 = 4 + 2$ — верно; неравенства: $2 + \frac{8}{3} = 4{,}67 < 5 < 4 + \frac{4}{3} = 5{,}33$ — верно. Груз на второй чаше $\frac{4}{3} + 2 + 2 = 5{,}33$: один баклажан (3) легче, два (6) тяжелее. Все массы положительны, так что набор масс возможен. Смысл: баклажан весит около трёх морковок, а груз — около пяти с третью, поэтому нужно два баклажана.

Ответ. 2 баклажана.