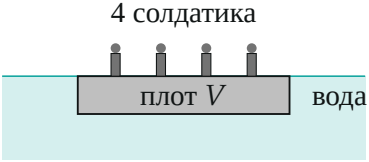
Плот с мыльницей

Задача 3. [Курчатов 2018/19, 7 класс, задача 3] Мальчик играл в ванной с солдатиками, переправляя их на прямоугольном деревянном плоту с одного берега на другой. Грузоподъёмность плота равна массе четырёх солдатиков. Скольких ещё можно будет взять пассажиров, если приклеить к плоту мыльницу такого же размера? Плотность дерева взять 560 кг/м^3.



Поясняющий рисунок: с четырьмя солдатиками плот погружён целиком — больше он не увезёт.

▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на плавание тел (закон Архимеда). Грузоподъёмность — наибольшая масса груза, при которой плот ещё не тонет: плот погружён полностью, и сила Архимеда равна весу плота с грузом. Приклеенная мыльница того же размера удваивает объём, а масса её мала по сравнению с массой деревянного плота, поэтому выталкивающая сила вырастает вдвое, а «собственный» вес почти не меняется. Главная идея: из грузоподъёмности находим массу солдатика через объём плота, а затем считаем, скольких солдатиков удержит удвоенный объём.

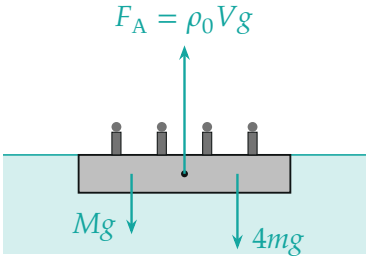
Обозначения. V — объём плота (и мыльницы); $\rho = 560$ кг/м^3 — плотность дерева, $M = \rho V$ — масса плота; $\rho_0 = 1000$ кг/м^3 — плотность воды; m — масса солдатика; N — сколько солдатиков увезёт плот с мыльницей. Солдатики стоят на плоту и в воду не погружены.

1. Плот без мыльницы: условие равновесия. Плот с четырьмя солдатиками погружён целиком и не движется, значит сумма сил равна нулю. На систему «плот + солдатики» действуют сила Архимеда вверх и силы тяжести вниз (рисунок 2). Второй закон Ньютона в проекции на вертикаль:

$$\rho_0 V g - M g - 4mg = 0 \quad \Rightarrow \quad 4m = (\rho_0 - \rho)\, V.$$

Масса солдатика выражается через объём плота:

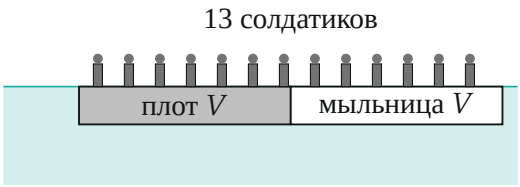
$$m = \frac{(\rho_0 - \rho)\,V}{4} = \frac{440}{4}\,V = 110\ \frac{\text{кг}}{\text{м}^3} \cdot V.$$



Силы, действующие на плот с солдатиками: сила Архимеда уравновешивает силы тяжести плота и груза.

2. Плот с мыльницей. Объём, вытесняющий воду, стал $2V$, масса почти не изменилась (мыльница пустая, её масса много меньше массы деревянного плота). Плот с N солдатиками не тонет, пока сила Архимеда при полном погружении не меньше суммы сил тяжести:

$$2\rho_0 V g \geq Mg + Nmg \quad \Rightarrow \quad N \leq \frac{2\rho_0 - \rho}{\rho_0 - \rho} \cdot 4.$$

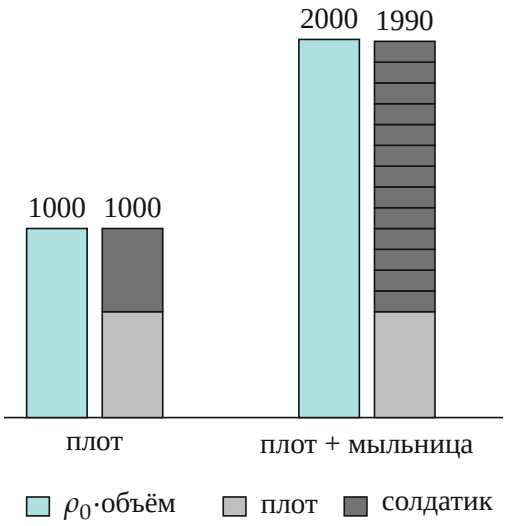


С мыльницей того же размера плот удерживает 13 солдатиков.

3. Число.

$$N \leq \frac{2 \cdot 1000 - 560}{1000 - 560} \cdot 4 = \frac{1440}{440} \cdot 4 \approx 13{,}1.$$

Солдатиков целое число, поэтому $N = 13$; ещё $13 - 4 = 9$ (рисунок 4).



Массы в килограммах на кубометр объёма плота V: слева без мыльницы $560 + 4 \cdot 110 = 1000$*; справа* $560 + 13 \cdot 110 = 1990 < 2000$*, а четырнадцатый солдатик дал бы* $2100 > 2000$.

Обратите внимание. Удвоение объёма не удваивает число пассажиров: дерево плота «съедает» 560 из 1000 единиц выталкивающей силы, а мыльница добавляет все 1000 — поэтому вместо 8 получается 13. Спрашивают, скольких *ещё* можно взять: 9, а не 13.

Проверка. Размерность: N — отношение плотностей, безразмерно. Пределы: невесомый плот ($\rho = 0$) везёт груз пропорционально объёму — формула даёт $N = 8$, ровно вдвое больше; мыльница той же массы, что плот, удвоила бы и силу тяжести — снова $N = 8$. Наш ответ больше 8, потому что мыльница лёгкая. Смысл: мыльница — почти «пустой» объём, и он целиком идёт на груз.

Ответ. Ещё 9 солдатиков (всего 13).