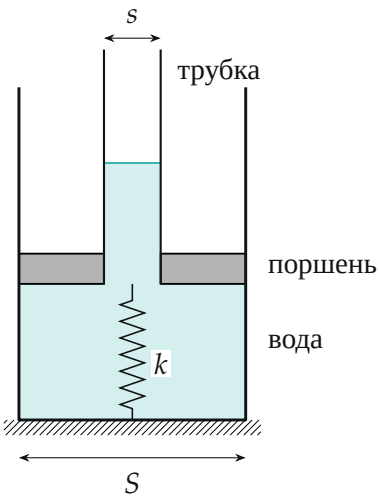
Поршень с трубкой и пружина

Задача 4. [Курчатов 2018/19, 7 класс, задача 4] В цилиндр, заполненный водой, с площадью дна 80 см^2 вставили поршень с трубкой и соединили поршень с дном цилиндра пружиной жёсткостью 30 Н/м. Через трубку в цилиндр долили ещё воды, при этом пружина растянулась на 3 см. Сколько воды долили в цилиндр? Известно, что радиус трубки в 4 раза меньше радиуса цилиндра. Ответ укажите в см^3.



Поясняющий рисунок: поршень с трубкой, под ним вода и пружина к дну; вода стоит и в трубке.

▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на гидростатику и равновесие поршня. Вода под поршнем давит на него снизу; это давление создаёт столб воды в трубке. Доливаем воду — столб в трубке растёт, давление под поршнем растёт, поршень поднимается и растягивает пружину, пока сила пружины не уравновесит прибавку силы давления. Долитая вода занимает два места: слой под поднявшимся поршнем и прибавку столба в трубке. Главная идея: масса поршня и начальная деформация пружины неизвестны, но они исчезают, если вычесть условия равновесия «до» и «после».

Обозначения. $S = 80$ см^2 — площадь цилиндра; s — площадь сечения трубки; $k = 30$ Н/м; m — масса поршня с трубкой; x — растяжение пружины; h — высота воды в трубке над нижней гранью поршня; $\Delta x = 3$ см и Δh — их изменения; $\rho = 1000$ кг/м^3, $g = 10$ м/с^2. Ось — вертикально вверх. Атмосфера давит и на воду в трубке, и на поршень сверху, поэтому её вклад сокращается: считаем избыточное давление.

1. Площадь трубки. Площадь круга пропорциональна квадрату радиуса:

$$s = \frac{S}{4^2} = \frac{80}{16} = 5 \text{ см}^2, \qquad S - s = 75 \text{ см}^2.$$

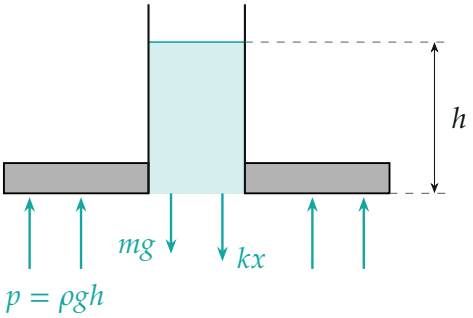
2. Давление под поршнем. Вода под поршнем и в трубке — одна покоящаяся жидкость, поэтому на уровне нижней грани поршня давление то же, что в трубке на этой глубине под поверхностью:

$$p = \rho g h.$$

Вода давит на поршень снизу на кольцо площадью $S - s$ (внутри трубки — сама вода, на поршень там давить нечему).

3. Равновесие поршня: второй закон Ньютона в проекции на вертикаль. На поршень с трубкой действуют сила давления воды вверх, сила тяжести вниз и сила растянутой пружины вниз (пружина тянет поршень к дну) — рисунок 2:

$$\rho g h\,(S - s) - mg - kx = 0.$$



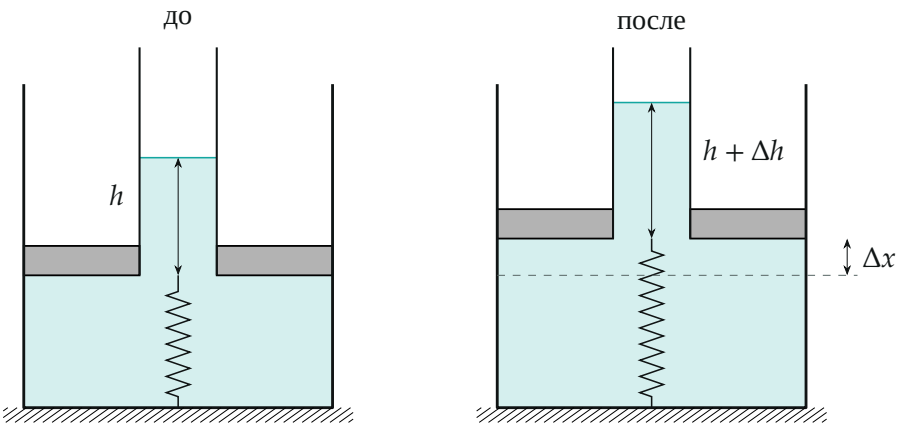
Силы, действующие на поршень с трубкой: давление воды на кольцо $S - s$ снизу, сила тяжести и сила пружины.

4. Вычитаем «до» из «после». После долива $x \to x + \Delta x$, $h \to h + \Delta h$, а m прежняя (рисунок 3). Вычитая уравнения равновесия, получаем

$$\rho g\,\Delta h\,(S - s) = k\,\Delta x \quad \Rightarrow \quad \Delta h = \frac{k\,\Delta x}{\rho g\,(S - s)},$$

$$\Delta h = \frac{30 \cdot 0{,}03}{1000 \cdot 10 \cdot 75 \cdot 10^{-4}} = 0{,}012 \text{ м} = 1{,}2 \text{ см}.$$

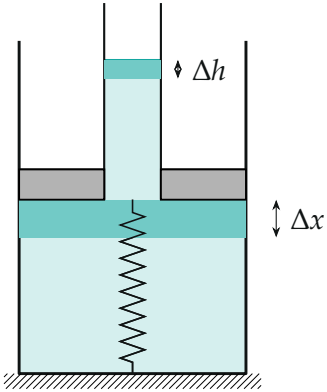
Знак плюс: столб в трубке над поршнем вырос, поршень поднялся.



До и после долива: поршень поднялся на Δx, столб в трубке над поршнем вырос на Δh.

5. Объём долитой воды. Вода несжимаема, поэтому долитый объём равен приросту объёма воды. Он состоит из слоя под поршнем высотой Δx во всё сечение S (там, где раньше был поршень, теперь вода; объём пружины не учитываем) и прибавки столба в трубке $s\,\Delta h$ — рисунок 4:

$$V = S\,\Delta x + s\,\Delta h = 80 \cdot 3 + 5 \cdot 1{,}2 = 240 + 6 = 246 \text{ см}^3.$$



Долитая вода (тёмная бирюза): слой $S\Delta x$ под поршнем и столбик $s\Delta h$ в трубке.

Обратите внимание. Высоту воды в трубке отсчитываем от поршня, а не от дна: поршень сам поднимается на Δx, и этот подъём уже учтён в слое $S\Delta x$. Площадь, на которую давит вода, — кольцо $S - s$, а не весь круг S.

Проверка. Размерность: $k\Delta x$ — ньютоны, $\rho g(S - s)$ — Н/м, их отношение Δh — метры. Предел: очень мягкая пружина ($k \to 0$) — поршень поднимается почти без роста давления, $\Delta h \to 0$, и вся вода уходит под поршень: $V \to S\Delta x = 240$ см^3. Смысл: почти вся вода (240 из 246 см^3) уходит под поршень, в трубке прибавляется лишь 6 см^3.

Ответ. $V = S\Delta x + s\Delta h$, где $\Delta h = \dfrac{k\Delta x}{\rho g(S - s)}$; $V = 246$ см^3.