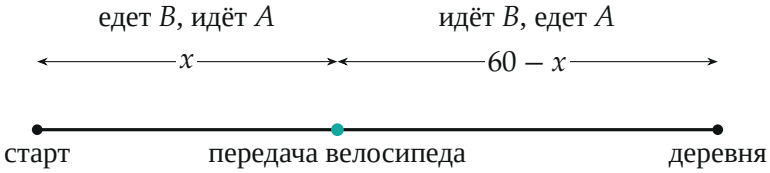
Один велосипед на двоих

Задача 5. [Курчатов 2018/19, 7 класс, задача 5] Двое ребят отправились в деревню. У одного из них есть велосипед, на котором можно ехать со скоростью 24 км/ч, и на нём нельзя ехать вдвоём. За какое наименьшее время они оба будут в деревне, если скорость одного из них без велосипеда равна 5 км/ч, а второго 6 км/ч. Расстояние до деревни 60 км.



Поясняющий рисунок: первый участок x один едет, другой идёт; в точке передачи велосипед оставляют, дальше — наоборот.

▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на равномерное движение и выбор наилучшего плана. Вдвоём на велосипеде ехать нельзя, но его можно оставить на дороге: один уезжает вперёд, бросает велосипед и идёт дальше пешком, второй доходит до велосипеда и едет. Оба прибывают в деревню; время задачи — момент прибытия того, кто позже. Если один приходит раньше, ему лучше было бы проехать меньше и отдать велосипед второму, поэтому наилучший план — когда оба приходят одновременно.

Обозначения. $u = 24$ км/ч — скорость на велосипеде; A — мальчик со скоростью $v_A = 5$ км/ч пешком, B — со скоростью $v_B = 6$ км/ч; $L = 60$ км; b — сколько всего километров проедет A, тогда B проедет $L - b$ (велосипед проходит каждый километр дороги ровно один раз: возвращаться назад ему невыгодно). T_A, T_B — времена в пути.

1. Время каждого не зависит от порядка. Каждый мальчик часть пути едет со скоростью u, остальное идёт пешком:

$$T_A = \frac{b}{u} + \frac{L-b}{v_A}, \qquad T_B = \frac{L-b}{u} + \frac{b}{v_B}.$$

Здесь важно лишь, сколько проехал каждый, а не в каком порядке. Ждать велосипеда не приходится: тот, кто едет, всегда быстрее идущего, поэтому велосипед оказывается в точке передачи раньше, чем туда доходит пешеход (рисунок 2).

2. Почему прибывают одновременно. С ростом b время T_A убывает (больше едет), а T_B растёт. Общее время — большее из двух, $\max(T_A, T_B)$; оно наименьшее там, где прямые пересекаются (рисунок 3):

$$\frac{b}{u} + \frac{L-b}{v_A} = \frac{L-b}{u} + \frac{b}{v_B}.$$

3. Решаем. Подставим числа (км, ч):

$$\frac{b}{24} + \frac{60-b}{5} = \frac{60-b}{24} + \frac{b}{6}.$$

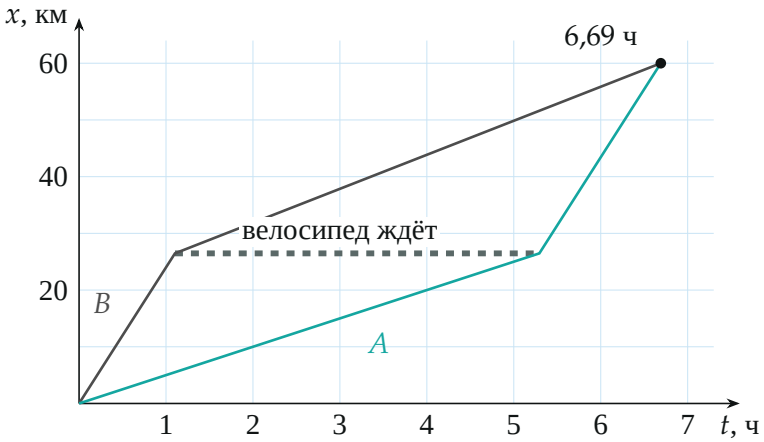
Умножим на 120: $5b + 1440 - 24b = 300 - 5b + 20b$, откуда $34b = 1140$ и

$$b = \frac{1140}{34} \approx 33{,}5 \text{ км}, \qquad L - b = \frac{900}{34} \approx 26{,}5 \text{ км}.$$

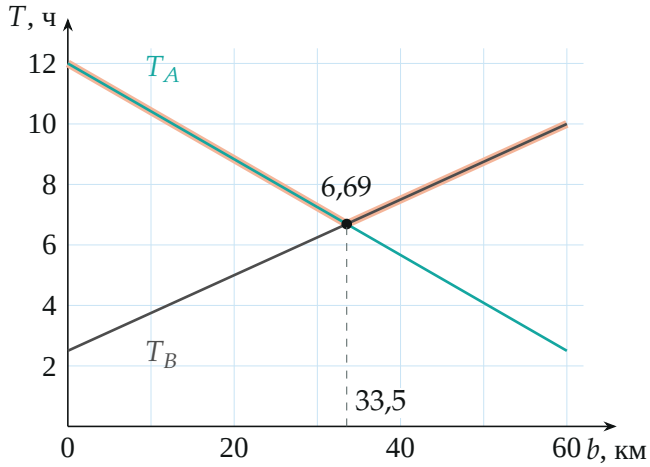
Медленный пешеход A едет 33,5 км, быстрый B — 26,5 км.

4. Время.

$$T = \frac{b}{24} + \frac{60-b}{5} = 1{,}40 + 5{,}29 \approx 6{,}69 \text{ ч} \approx 6 \text{ ч } 41 \text{ мин}.$$

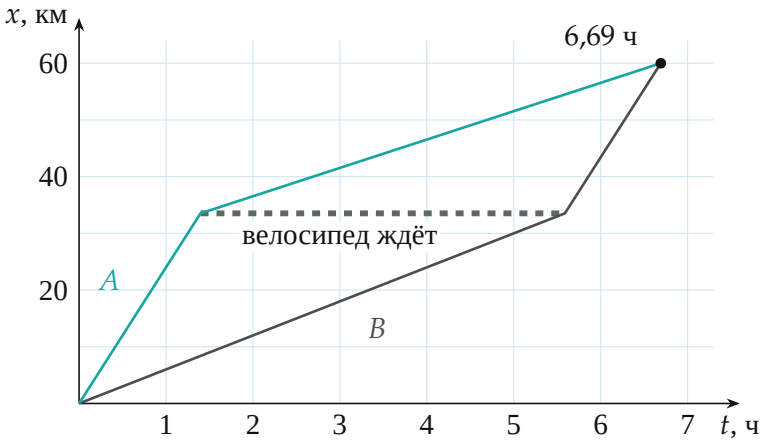


Графики движения, если первым едет B: он проезжает 26,5 км, оставляет велосипед (серый пунктир — велосипед стоит) и идёт; A доходит до велосипеда и догоняет B ровно у деревни.



Время в пути от числа километров b, которые проезжает A: T_A убывает, T_B растёт; общее время (красная ломаная) наименьшее в точке пересечения.

Обратите внимание. Тот, кто медленнее ходит, должен ехать больше: каждый километр на велосипеде экономит ему $\frac{1}{5} - \frac{1}{24}$ ч, а быстрому — только $\frac{1}{6} - \frac{1}{24}$ ч. Кто поедет первым, неважно: если первым едет A (33,5 км), время то же (рисунок 4).



Тот же план, но первым едет A: прибытие одновременно, через те же 6,69 ч.

Проверка. $T_B = \frac{26{,}5}{24} + \frac{33{,}5}{6} = 1{,}10 + 5{,}59 = 6{,}69$ ч — совпадает с T_A. Предел: если бы велосипед ехал бесконечно быстро ($u \to \infty$), получилось бы $\frac{L-b}{5} = \frac{b}{6}$, то есть $b = \frac{6L}{11}$ и $T = \frac{L}{11} \approx 5{,}45$ ч — меньше нашего, как и должно быть. Без велосипеда медленный шёл бы 12 ч; велосипед сокращает время почти вдвое.

Ответ. $T = \dfrac{b}{24} + \dfrac{60-b}{5}$ при $b = \dfrac{1140}{34}$ км, $T \approx 6{,}7$ ч (6 ч 41 мин).