Квадрат 2×2 из резисторов

Задача 3. [Курчатов 2018/19, 8 класс, задача 3] В квадрате 2×2 соседние узлы соединены через резисторы с сопротивлением 1 Ом. Чему равно сопротивление между противоположными углами квадрата?

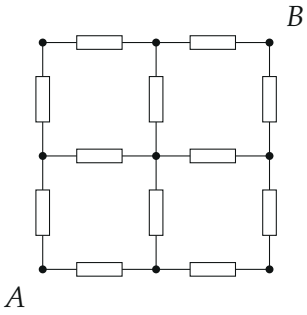


Схема условия: сетка 2×2 клетки, 9 узлов, 12 резисторов по $R=1$ Ом.

▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на сопротивление симметричной цепи. Ищем узлы с одинаковым потенциалом и токи, равные по симметрии; тогда вместо системы уравнений Кирхгофа хватает правил последовательного и параллельного соединения.

Обозначения. $R=1$ Ом; U — напряжение между A и B, $\varphi_A=U$, $\varphi_B=0$; I_0 — полный ток; узлы C (середина левой стороны), D (середина верхней), O (центр), E и F — середины нижней и правой сторон.

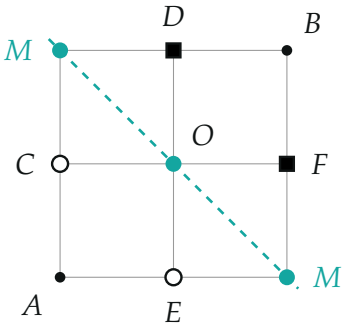
1. Симметрия относительно диагонали AB. При отражении в диагонали AB сетка совпадает сама с собой, A и B остаются на месте — значит, токи в симметричных резисторах равны. Ток I_0 из узла A делится поровну: $I_1=I_0/2$ в каждую сторону. Узлы C и E имеют одинаковый потенциал, D и F — тоже.

2. Поворот на 180° со сменой полярности. Повернём схему на 180°: A и B меняются местами. Поменяв ещё и полярность, получаем ту же цепь, поэтому потенциал любого узла равен U минус потенциал узла, в который он переходит при повороте. Центр O переходит сам в себя: $\varphi_O=U-\varphi_O$, то есть $\varphi_O=U/2$. Верхний левый угол переходит в

нижний правый: $\varphi_{вл} = U - \varphi_{нп}$; а по пункту 1 эти углы симметричны относительно AB, $\varphi_{вл} = \varphi_{нп}$. Значит,

$$\varphi_{вл} = \varphi_O = \varphi_{нп} = \frac{U}{2}.$$

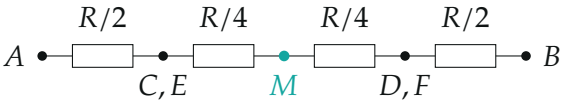
Узлы побочной диагонали (бирюзовые на рисунке 2) имеют потенциал $U/2$, их можно соединить в один узел M.



Равные потенциалы: C и E (кружки), D и F (квадраты); побочная диагональ — $U/2$.

3. Эквивалентная схема. Половина цепи $A \to M$: от A к узлам C и E — два резистора параллельно, $R/2$; от C и E к узлам M — четыре резистора (C–верхний левый, C–O, E–O, E–нижний правый), параллельно $R/4$. Вторая половина $M \to B$ такая же (рисунок 3):

$$R_{AB} = 2\left(\frac{R}{2} + \frac{R}{4}\right) = \frac{3}{2}R = 1{,}5\ \text{Ом}.$$

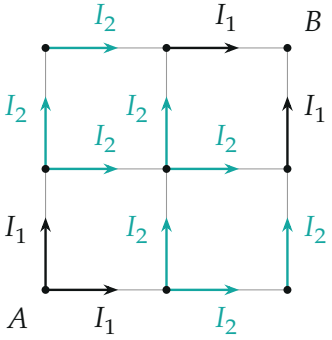


Эквивалентная схема после слияния узлов равного потенциала.

4. Второй способ — через токи (как у организаторов). Подпишем на сетке токи (рисунок 4): I_1 — в двух резисторах у A и в двух у B (поворот на 180° со сменой полярности переводит одни в другие), I_2 — во всех четырёх «внутренних» резисторах, примыкающих к центру, и в четырёх, ведущих в боковые углы. Закон сохранения заряда для узла C: втекает I_1, вытекает по двум одинаковым резисторам к узлам потенциала $U/2$, значит $I_2 = I_1/2$. Напряжение U_{AB} по пути $A \to C \to O \to F \to B$:

$$U_{AB} = RI_1 + RI_2 + RI_2 + RI_1 = 3RI_1, \qquad I_0 = 2I_1,$$

$$R_{AB} = \frac{U_{AB}}{I_0} = \frac{3RI_1}{2I_1} = 1{,}5R.$$



Токи в резисторах: I_1 у углов A и B, $I_2 = I_1/2$ во всех остальных.

Обратите внимание. Резисторы, соединяющие узлы одного потенциала, тока не несут — их можно убрать или заменить проводом. Здесь таких нет, но слияние узлов побочной диагонали законно именно поэтому.

Проверка. Размерность: Ом. Проверка законом Кирхгофа на python для 9 узлов — 1,5 Ом. Оценка: кратчайший путь $A \to B$ — 4 резистора ($4R$), таких путей 6, они частично общие; ответ $1{,}5R$ лежит между $4R/6 \approx 0{,}67R$ (если бы пути были независимы) и $4R$.

Смысл: благодаря двум симметриям 12 резисторов сводятся к четырём, соединённым последовательно.

Ответ. $R_{AB} = \dfrac{3}{2}R = 1{,}5$ Ом.