Велосипед на двоих (80 км)

Задача 4. [Курчатов 2018/19, 8 класс, задача 4] Двое ребят отправились в деревню. У одного из них есть велосипед, на котором можно ехать со скоростью 28 км/ч, и на нём нельзя ехать вдвоём. За какое наименьшее время они оба будут в деревне, если скорость одного из них без велосипеда равна 8 км/ч, а второго 7 км/ч. Расстояние до деревни 80 км.



Поясняющий рисунок: первый едет до отметки x, оставляет велосипед и идёт пешком; второй доходит до велосипеда и едет.

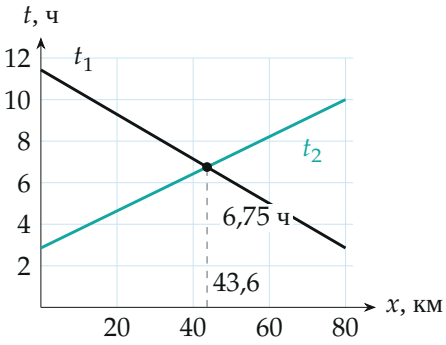
▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на равномерное движение и поиск наименьшего времени. Велосипед быстрее ходьбы, поэтому выгодно, чтобы им пользовались оба: один едет первую часть пути и оставляет велосипед у дороги, второй, дойдя пешком, едет дальше. Время «обоих в деревне» — это время того, кто приходит последним. Если один приходит раньше, можно сдвинуть точку передачи в пользу другого и уменьшить время опоздавшего. Поэтому наилучшая точка та, где они приходят одновременно.

Обозначения. $L = 80$ км, $u = 28$ км/ч — скорость на велосипеде, $v_1 = 7$ км/ч и $v_2 = 8$ км/ч — скорости пешком; x — путь, который проезжает на велосипеде первый (идущий пешком со скоростью 7 км/ч); t_1, t_2 — время в пути каждого.

1. Время каждого. Первый едет x и идёт $L - x$, второй идёт x и едет $L - x$:

$$t_1 = \frac{x}{u} + \frac{L - x}{v_1}, \qquad t_2 = \frac{x}{v_2} + \frac{L - x}{u}.$$

Велосипед ждёт второго: первый добирается до отметки x быстрее ($x/u < x/v_2$), так что передача возможна. При росте x время t_1 убывает, а t_2 растёт (рисунок 2), поэтому $\max(t_1, t_2)$ наименьший в точке пересечения.



Время в пути каждого в зависимости от точки передачи x; время обоих — верхняя из двух линий, её минимум в пересечении.

2. Условие одновременного прибытия. $t_1 = t_2$:

$$\frac{x}{u} + \frac{L-x}{v_1} = \frac{x}{v_2} + \frac{L-x}{u} \quad \Rightarrow \quad \frac{x}{28} + \frac{80-x}{7} = \frac{x}{8} + \frac{80-x}{28}.$$

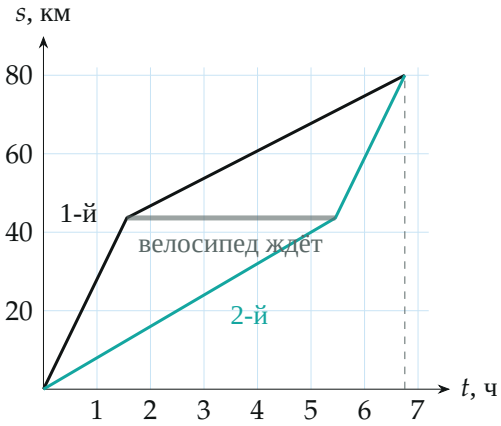
Умножаем на 56: $2x + 8(80-x) = 7x + 2(80-x)$, откуда $640 - 6x = 160 + 5x$ и

$$x = \frac{480}{11}\ \text{км} \approx 43{,}6\ \text{км}.$$

3. Время.

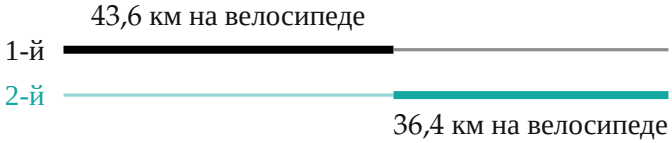
$$t = \frac{x}{v_2} + \frac{L-x}{u} = \frac{480}{11\cdot 8} + \frac{400}{11\cdot 28}\ \text{ч} = \frac{60}{11} + \frac{100}{77}\ \text{ч} = \frac{520}{77}\ \text{ч} \approx 6{,}75\ \text{ч}.$$

Графики движения обоих и велосипеда — на рисунке 3: велосипед с 1,56 до 5,45 ч стоит у дороги.



Графики движения: чёрный — первый (едет, потом идёт 7 км/ч), бирюзовый — второй (идёт 8 км/ч, потом едет); оба приходят через 6,75 ч.

4. Почему не лучше по-другому. Если ехать будет тот, кто ходит быстрее, а медленный пойдёт первым, уравнение одинакового прибытия даёт то же время: каждый всё равно проезжает свою долю пути, и от порядка зависит только, кто ждёт велосипед. Передавать велосипед несколько раз тоже бесполезно: время каждого зависит лишь от суммарного пути, пройденного им пешком, а не от порядка отрезков (рисунок 4). Поэтому найденное время — наименьшее.



Распределение пути: жирный отрезок — на велосипеде, тонкий — пешком; вместе отрезки на велосипеде покрывают всю дорогу ровно один раз.

Обратите внимание. Больше половины пути на велосипеде проезжает тот, кто ходит медленнее: так их времена выравниваются.

Проверка. Размерность: км/(км/ч) = ч. Подстановка: первый — $43{,}6/28 + 36{,}4/7 = 1{,}56 + 5{,}19 = 6{,}75$ ч; второй — $43{,}6/8 + 36{,}4/28 = 5{,}45 + 1{,}30 = 6{,}75$ ч, совпали. Оценка снизу: даже если бы оба шли со

скоростью 8 км/ч и проехали по половине пути, $40/8 + 40/28 = 6{,}43$ ч — немногим меньше.

Смысл: велосипед экономит около 4–5 часов по сравнению с ходьбой пешком ($80/7 \approx 11{,}4$ ч у медленного).

Ответ. $t = \dfrac{520}{77}$ ч $\approx 6{,}75$ ч ($\approx 6{,}8$ ч); велосипед передают на отметке $x = 480/11 \approx 43{,}6$ км.