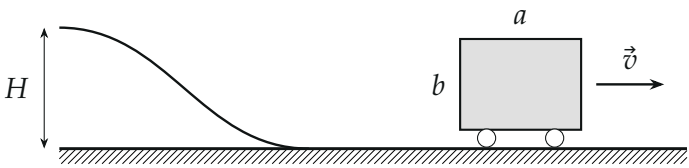
Опрокидывание тележки

Задача 5. [Курчатов 2018/19, 8 класс, задача 5] Прямоугольная тележка длиной $a = 8$ см и высотой $b = 6$ см съехала с горки, после чего её колёса заклинило и тележку перевернуло. Как вы думаете, какой высоты была горка?



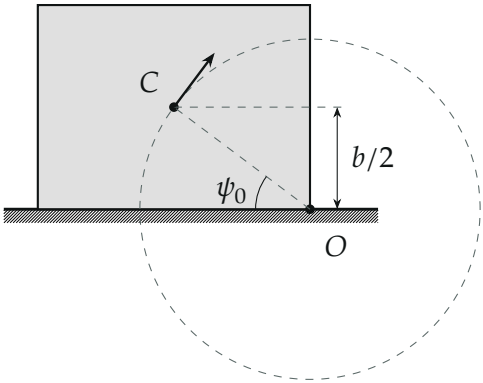
Поясняющий рисунок: тележка скатывается с горки высотой H и едет по горизонтали.

▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на закон сохранения энергии и устойчивость. Когда колёса заклинило, тележка не скользит, а начинает поворачиваться вокруг переднего нижнего ребра O (рисунок 2). При повороте её центр тяжести поднимается: от высоты $b/2$ до наибольшей, $\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2}$, когда диагональ встаёт вертикально. Перевернётся тележка, только если её энергии хватит пройти эту «горку» центра тяжести; дальше она падает сама. Энергия набрана на спуске с горки высотой H. Трением качения и сопротивлением воздуха пренебрегаем, тележку считаем однородным прямоугольником (центр тяжести — в центре), колёса малыми.

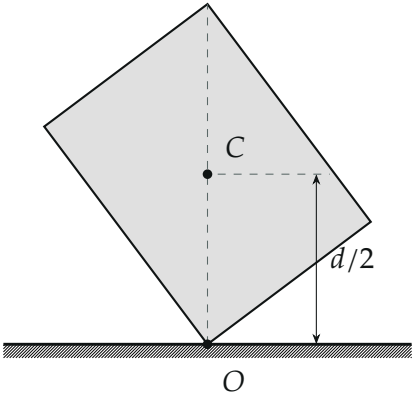
Обозначения. m — масса тележки; v — её скорость внизу горки; $d = \sqrt{a^2+b^2} = 10$ см — диагональ; $h_0 = b/2 = 3$ см — начальная высота центра тяжести над ребром O, $h_{\max} = d/2 = 5$ см — наибольшая.

1. Подъём центра тяжести при повороте. Центр тяжести C движется по окружности радиуса $d/2$ вокруг ребра O (рисунок 2). Его высота — $\frac{d}{2}\sin\psi$, где ψ — угол отрезка OC с горизонтом. Вначале $\sin\psi_0 = b/d$, высота $b/2$; при $\psi = 90°$ (диагональ вертикальна, рисунок 3) высота наибольшая, $d/2$. Подъём:

$$\Delta h = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2} - \frac{b}{2} = 5\text{ см} - 3\text{ см} = 2\text{ см}.$$



Начало поворота вокруг переднего ребра O: центр тяжести C идёт по окружности радиуса $d/2$ (пунктир).

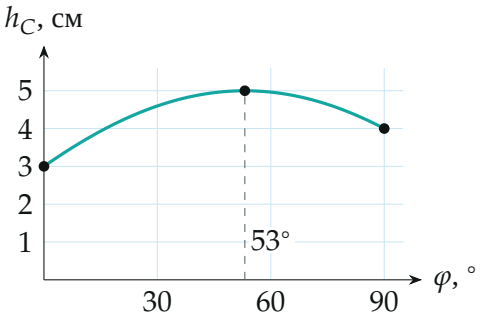


Неустойчивое положение: диагональ вертикальна, центр тяжести выше всего — на $d/2$ над ребром.

2. Закон сохранения энергии. На спуске потенциальная энергия переходит в кинетическую: $mgH = \dfrac{mv^2}{2}$. При повороте кинетическая переходит обратно в потенциальную центра тяжести. Чтобы тележка прошла верхнее положение, её энергии должно хватить на подъём Δh (в верхней точке скорость может обратиться в нуль):

$$mgH \geqslant mg\,\Delta h \quad \Rightarrow \quad H \geqslant \frac{\sqrt{a^2+b^2}-b}{2} = 2 \text{ см}.$$

Высота центра тяжести при повороте — на рисунке 4: «горка» высотой 2 см, после неё тележка опрокидывается сама и ложится на переднюю стенку (центр тяжести на высоте $a/2 = 4$ см).



Высота центра тяжести в зависимости от угла поворота тележки φ: $h_C = \frac{d}{2}\sin(\psi_0 + \varphi)$, от 3 см до 5 см и вниз до 4 см.

Обратите внимание. 2 см — наименьшая возможная высота горки. При резком заклинивании колёс часть энергии теряется в ударе: на поворот вокруг ребра переходит не вся кинетическая энергия. Если считать тележку однородной пластиной, закон сохранения момента импульса относительно ребра O даёт, что на поворот остаётся доля $\dfrac{3b^2}{4(a^2+b^2)} = 0{,}27$ энергии, и тогда нужна горка $H \approx 2/0{,}27 \approx 7{,}4$ см. Ответ «не меньше 2 см» — оценка снизу, которую имели в виду организаторы.

Проверка. Размерность: см. Предельные случаи: очень высокая узкая тележка ($b \gg a$) — $\Delta h = \frac{1}{2}(\sqrt{a^2+b^2} - b) \approx \frac{a^2}{4b} \to 0$, её опрокинуть легко; низкая длинная ($a \gg b$) — $\Delta h \approx a/2$, нужна большая горка. Второй способ: $\Delta h = \frac{d}{2}(1 - \sin\psi_0) = 5(1 - 0{,}6) = 2$ см.

Смысл: чтобы опрокинуть тележку, её центр тяжести надо поднять на разность половины диагонали и половины высоты; эту энергию даёт спуск с горки.

Ответ. $H \geqslant \dfrac{\sqrt{a^2+b^2} - b}{2} = 2$ см (без учёта потерь при ударе).