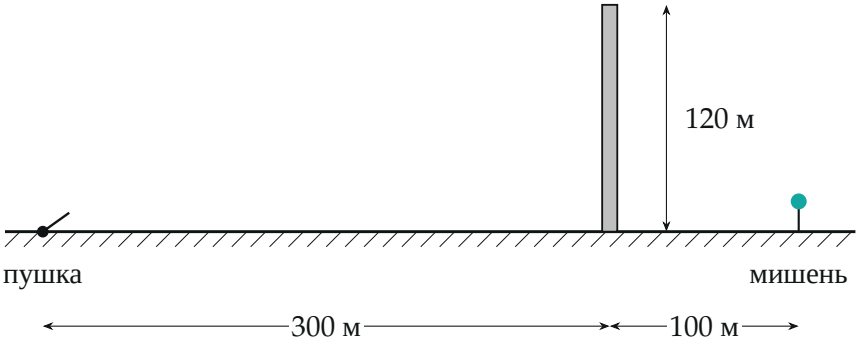
Ядро над стенкой

Задача 1. [Курчатов 2018/19, 9 класс, задача 1] Человек стреляет из пушки по мишени. На расстоянии 300 м от него стоит стенка высотой 120 м, за которой на расстоянии 100 м на земле стоит мишень. С какой скоростью ядро вылетит из пушки при удачном выстреле?



Поясняющий рисунок: пушка, стенка и мишень за ней.

▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на движение тела, брошенного под углом к горизонту, с поиском минимума. Удачный выстрел — тот, при котором ядро пролетает над стенкой и падает точно в мишень. Дальность полёта задана (400 м), а угол вылета можно менять: для каждого угла скорость определяется дальностью. Ищем, при каком допустимом угле скорость наименьшая, и все скорости, при которых попадание возможно. Сопротивление воздуха не учитываем, $g = 10$ м/с^2 (в условии не дано), пушку считаем стоящей на земле.

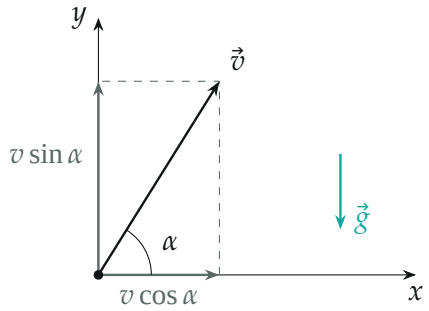
Обозначения. $D = 400$ м — расстояние до мишени, $s = 300$ м — до стенки, $H = 120$ м — высота стенки; v — скорость вылета, α — угол вылета к горизонту, $k = \operatorname{tg}\alpha$.

1. Уравнения движения. Ось x — горизонтально к мишени, ось y — вертикально вверх, начало — в пушке (рисунок 2). Ускорение ядра $\vec{g}$ направлено вниз, поэтому по x движение равномерное, по y — равноускоренное:

$$x = v\cos\alpha \cdot t, \qquad y = v\sin\alpha \cdot t - \frac{gt^2}{2}.$$

Исключаем время $t = x/(v\cos\alpha)$ и получаем уравнение траектории:

$$y = x\,\mathrm{tg}\,\alpha - \frac{gx^2}{2v^2\cos^2\alpha}.$$



Скорость вылета и её проекции на оси; ускорение ядра — $\vec{g}$ вниз.

2. Попадание в мишень связывает v и α. Ядро падает в мишень: $y = 0$ при $x = D$. Из уравнения траектории

$$D\,\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{gD^2}{2v^2\cos^2\alpha} \quad\Rightarrow\quad v^2 = \frac{gD}{2\sin\alpha\cos\alpha} = \frac{gD}{2}\left(k + \frac{1}{k}\right),$$

здесь использовано $\dfrac{1}{\sin\alpha\cos\alpha} = \dfrac{1}{\mathrm{tg}\,\alpha\cos^2\alpha} = \dfrac{1+k^2}{k}$.

3. Пролёт над стенкой ограничивает угол. Подставим v^2 в уравнение траектории: $\dfrac{g}{2v^2\cos^2\alpha} = \dfrac{k}{D}$, и траектория любого попадающего выстрела

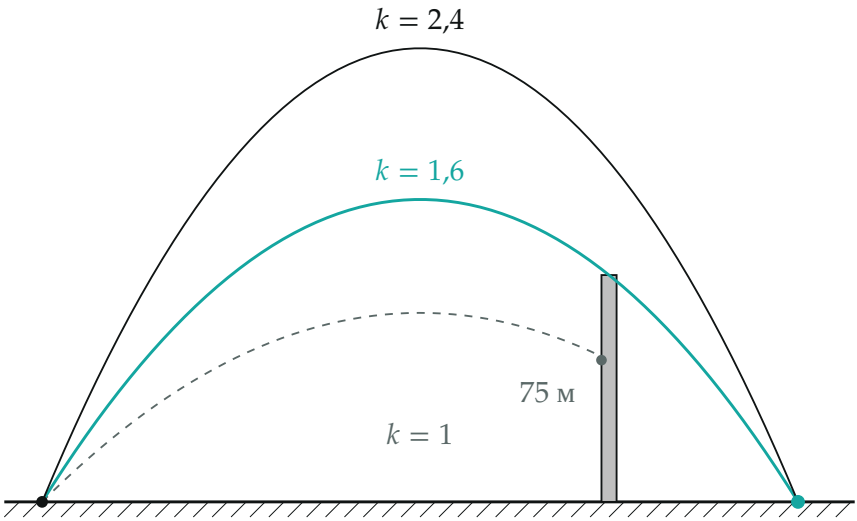
$$y = kx\left(1 - \frac{x}{D}\right).$$

Над стенкой ($x = s$) ядро на высоте $h = ks\,(1 - s/D) = 75k$ м. Условие пролёта $h > H$:

$$k > \frac{H}{s(1-s/D)} = \frac{120}{75} = 1{,}6.$$

На рисунке 3 три попадающие траектории: при $k = 1$ (45°, самая «дешёвая» по скорости) ядро врезается в стенку на высоте 75 м; при $k = 1{,}6$

оно задевает верх стенки; при $k = 2{,}4$ проходит с запасом.



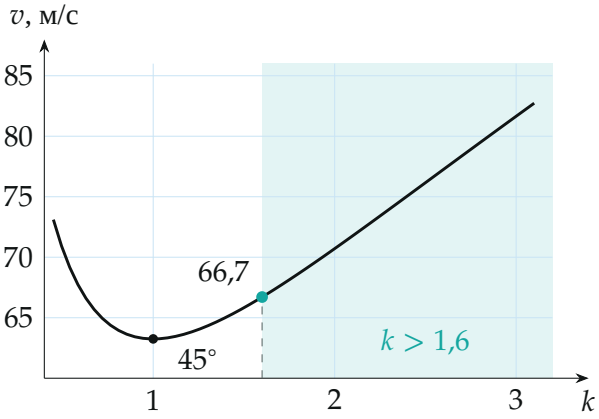
Траектории, попадающие в мишень (точки вычислены по $y = kx(1 - x/D)$): пунктир упирается в стенку.

4. Минимум скорости. Функция $f(k) = k + \dfrac{1}{k}$ убывает при $k < 1$ и возрастает при $k > 1$ (минимум $f = 2$ при $k = 1$, это угол 45°). Разрешены только $k > 1{,}6$, а там f растёт, значит наименьшая скорость — на границе $k = 1{,}6$, когда ядро проходит впритык над стенкой (рисунок 4):

$$v_{\min}^2 = \frac{gD}{2}\left(k + \frac{1}{k}\right) = \frac{10 \cdot 400}{2}\,(1{,}6 + 0{,}625)\ \text{м}^2/\text{с}^2 = 4450\ \text{м}^2/\text{с}^2,$$

$$v_{\min} = \sqrt{4450}\ \text{м/с} \approx 66{,}7\ \text{м/с}.$$

Любая большая скорость тоже годится: при $v > v_{\min}$ уравнение $k + 1/k = 2v^2/(gD)$ имеет корень $k > 1{,}6$ — крутой выстрел.



Скорость попадающего выстрела в зависимости от $k = \operatorname{tg}\alpha$; закрашено — траектории над стенкой.

Обратите внимание. Самая выгодная по скорости дальность — под 45° ($v = \sqrt{gD} \approx 63{,}2$ м/с), но такая траектория над стенкой проходит на высоте всего 75 м. Поэтому минимум ищется не в вершине функции, а на границе допустимой области.

В официальном решении то же самое записано через высоту h пролёта над стенкой: $v^2 = \dfrac{3gl^2}{2h} + \dfrac{8gh}{3}$ при $l = 100$ м; это наша формула при $h = 75k$.

Проверка. Размерность: $[gD] = \text{м/с}^2 \cdot \text{м} = \text{м}^2/\text{с}^2$. Второй способ: при $k = 1{,}6$ время полёта $t = \sqrt{2kD/g} = \sqrt{128}$ с $\approx 11{,}3$ с, $v_x = D/t \approx 35{,}4$ м/с, $v_y = kv_x \approx 56{,}6$ м/с, $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \approx 66{,}7$ м/с — то же. Высота над стенкой $75 \cdot 1{,}6 = 120$ м — впритык, как и должно быть на границе.

Смысл: стенка заставляет стрелять круче 45°, а за крутизну платят скоростью — около 3,5 м/с сверх минимально возможной для этой дальности.

Ответ. $v \geqslant v_{\min} = \sqrt{\dfrac{gD}{2}\left(k + \dfrac{1}{k}\right)}$ при $k = \dfrac{H}{s(1 - s/D)} = 1{,}6$, $v_{\min} \approx 66{,}7$ м/с (при $g = 10$ м/с^2).