Шар с железной ручкой на дне

Задача 2. [Курчатов 2018/19, 9 класс, задача 2] В пруд закинули деревянный шар объёма V, с тонкой железной ручкой длиной L. При какой минимальной массе ручки шар будет лежать на дне водоёма? Плотности воды ρ_1 и дерева ρ_2 считайте известными.

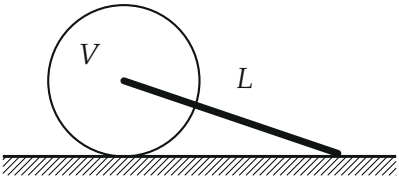
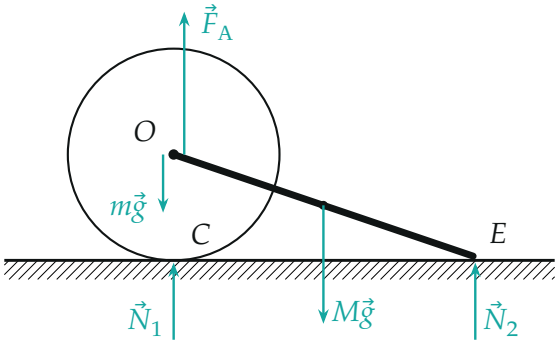


Рисунок условия: шар на дне, ручка закреплена в центре шара и упирается концом в дно.

▲ **Решение.** **Что происходит.** Это задача на равновесие твёрдого тела (правило моментов). Дерево легче воды, поэтому сила Архимеда больше силы тяжести шара: шар тянет вверх. Ручка тяжёлая, она опирается концом на дно и своим весом прижимает шар. Шар «лежит на дне», пока дно в точке касания давит на него, то есть сила реакции там не отрицательна. Граничный случай — эта реакция обращается в нуль.

Обозначения. $m = \rho_2 V$ — масса шара, M — масса ручки; $F_\text{A} = \rho_1 g V$ — сила Архимеда на шар (на тонкую ручку её не учитываем: объём ручки мал); N_1 — реакция дна в точке касания шара C, N_2 — реакция дна на конец ручки E; d — горизонтальное расстояние от C до E. Трения в задаче не нужно: все силы вертикальны.

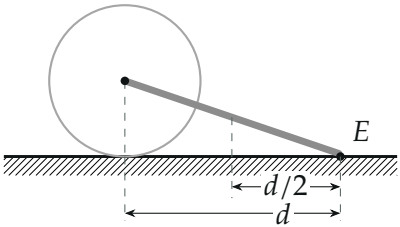
1. Силы на систему «шар + ручка». Ручка закреплена в центре шара O (рисунок 2). На систему действуют: $m\vec{g}$ и $\vec{F}_\text{A}$ — в центре шара; $M\vec{g}$ — в середине ручки; $\vec{N}_1$ — в точке C точно под центром; $\vec{N}_2$ — в конце ручки. Все силы вертикальны, поэтому горизонтальной силы трения не требуется.



Силы, действующие на шар с ручкой; реакции дна N_1 и N_2 нарисованы снизу к точкам приложения.

2. Правило моментов относительно конца ручки E**.** Выбираем ось через E, чтобы исключить неизвестную N_2. Плечи вертикальных сил — горизонтальные расстояния до E (рисунок 3): у N_1, F_A и mg — d (точки C и O на одной вертикали), у Mg — $d/2$ (середина ручки посередине между O и E по горизонтали). Моменты, поворачивающие систему против часовой стрелки (поднимающие шар), уравновешены моментом силы тяжести ручки:

$$N_1 d + F_A d - mg\,d - Mg\,\frac{d}{2} = 0 \quad \Rightarrow \quad N_1 = \frac{Mg}{2} - (F_A - mg)\,.$$



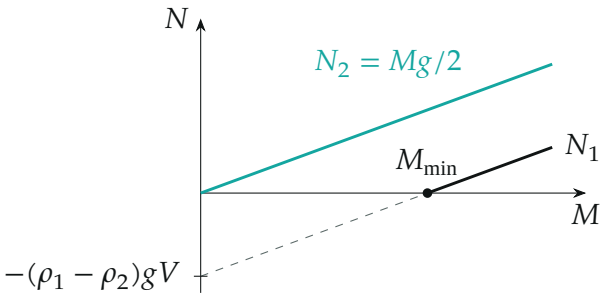
Плечи сил относительно конца ручки E: у сил в центре шара и в точке касания — d, у силы тяжести ручки — $d/2$.

3. Условие «лежит на дне». Дно может только давить на шар, поэтому $N_1 \geqslant 0$:

$$\frac{Mg}{2} \geqslant F_A - mg = (\rho_1 - \rho_2)\,gV \quad \Rightarrow \quad M \geqslant 2V(\rho_1 - \rho_2).$$

Если M меньше, по формуле выходит $N_1 < 0$ — дно должно было бы тянуть шар вниз, чего оно не умеет: шар всплывает, поворачиваясь вокруг конца ручки E.

4. Вторая реакция. Для полноты — правило моментов относительно точки C (там же проходят F_A и mg): $N_2 d = Mg\,d/2$, то есть $N_2 = Mg/2$: ручка опирается на дно ровно половиной своего веса, вторая половина «висит» на шаре. Именно эта половина, $Mg/2$, и прижимает шар ко дну против подъёмной силы $(\rho_1 - \rho_2)gV$. Зависимость реакций от массы ручки — на рисунке 4.



Реакции дна в зависимости от массы ручки: при $M < M_{\min}$ «нужна» отрицательная N_1 (пунктир) — шар всплывает.

Обратите внимание. Ответ не зависит от длины ручки L и от того, под каким углом она лежит: плечи всех сил пропорциональны одному и тому же d, и оно сокращается. Важно только, что ручка однородна и закреплена в центре шара.

Проверка. Размерность: $[V\rho]$ = кг. Предельный случай: если $\rho_2 = \rho_1$, шар безразличен к погружению, и ручка не нужна — $M_{\min} = 0$. Если бы шар был тяжелее воды ($\rho_2 > \rho_1$), формула даёт $M_{\min} < 0$ — лежит и без ручки, как и должно быть.

Смысл: ручка, опираясь на дно, прижимает шар половиной своего веса, и этой половины должно хватить, чтобы перекрыть избыток выталкивающей силы над весом шара.

Ответ. $M_{\min} = 2V(\rho_1 - \rho_2)$ (от длины ручки не зависит).