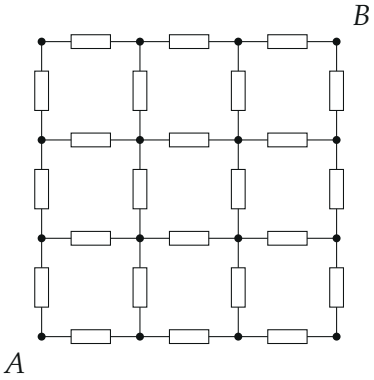
Квадрат 3×3 из резисторов

Задача 3. [Курчатов 2018/19, 9 класс, задача 3] В квадрате 3×3 соседние узлы соединены через резисторы с сопротивлением 1 Ом. Чему равно сопротивление между противоположными углами квадрата?



Поясняющий рисунок: сетка 3 × 3 клетки, 16 узлов, 24 резистора по $R = 1$ Ом.

▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на сопротивление симметричной цепи. Напрямую пришлось бы писать законы Кирхгофа для 16 узлов. Вместо этого ищем узлы с одинаковым потенциалом: их можно соединять проводом (ток по нему не пойдёт), и цепь сворачивается в последовательно-параллельную.

Обозначения. $R = 1$ Ом; U — напряжение между A и B, $\varphi_A = U$, $\varphi_B = 0$; узел в столбце i и строке j (от A) — (i,j), $A = (0,0)$, $B = (3,3)$.

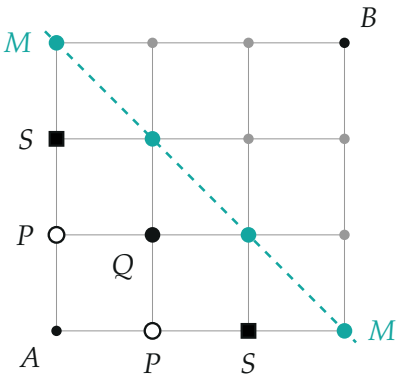
1. Первая симметрия — отражение относительно диагонали AB. При отражении в диагонали AB сетка переходит сама в себя, A и B остаются на месте. Значит, распределение потенциалов тоже не меняется: узлы (i,j) и (j,i) имеют одинаковый потенциал. На рисунке 2 такие пары одного цвета и формы.

2. Вторая симметрия — поворот на 180° со сменой полярности. Повернём сетку на 180° вокруг центра: A и B меняются местами. Если одновременно поменять полярность источника, цепь совпадёт с исходной, но все потенциалы отсчитываются «наоборот»: $\varphi(i,j) = U - \varphi(3-$

$i, 3-j$). Для узлов побочной диагонали ($i+j=3$) обе симметрии вместе дают $\varphi(i,3-i) = \varphi(3-i,i) = U - \varphi(i,3-i)$, то есть

$$\varphi(0,3) = \varphi(1,2) = \varphi(2,1) = \varphi(3,0) = \frac{U}{2}.$$

Соединим эти четыре узла в один узел M (рисунок 2). Цепь разделилась на две одинаковые половины: $A \to M$ и $M \to B$, поэтому $R_{AB} = 2R_{AM}$.

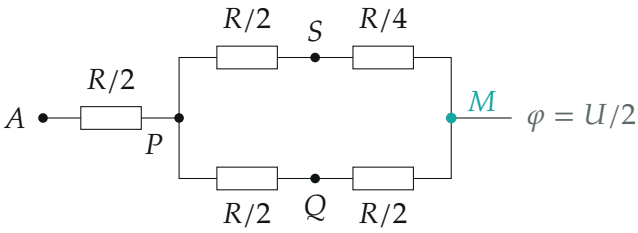


Равные потенциалы: узлы P, узлы S попарно симметричны относительно AB; бирюзовые узлы побочной диагонали имеют потенциал $U/2$ и сливаются в узел M.

3. Половина цепи $A \to M$. Сольём ещё и симметричные пары: два узла $P = (0,1), (1,0)$ и два узла $S = (0,2), (2,0)$; узел $Q = (1,1)$ один. Считаем, сколько резисторов оказалось между каждой парой новых узлов (резисторы между узлами одного потенциала токи не несут, их нет и здесь):

- A–P: два резистора параллельно, $R/2$;
- P–S: два резистора ($(0,1)$–$(0,2)$ и $(1,0)$–$(2,0)$), $R/2$;
- P–Q: два резистора, $R/2$;
- S–M: от каждого узла S по два резистора к узлам M, всего четыре, $R/4$;
- Q–M: два резистора ($(1,1)$–$(1,2)$ и $(1,1)$–$(2,1)$), $R/2$.

Получилась схема рисунка 3: после A–P две параллельные ветви P–S–M и P–Q–M.



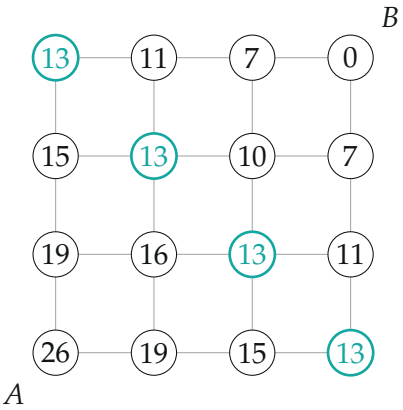
Эквивалентная схема половины цепи от A до узлов потенциала $U/2$.

4. Счёт. Верхняя ветвь $R/2 + R/4 = 3R/4$, нижняя $R/2 + R/2 = R$; параллельно:

$$R_{PM} = \frac{\frac{3R}{4}\cdot R}{\frac{3R}{4}+R} = \frac{3R}{7}, \qquad R_{AM} = \frac{R}{2} + \frac{3R}{7} = \frac{13R}{14},$$

$$R_{AB} = 2R_{AM} = \frac{13}{7}R = \frac{13}{7}\ \text{Ом} \approx 1{,}86\ \text{Ом}.$$

5. Проверка потенциалами. Пусть $U = 26$ (в условных единицах). Из схемы рисунка 3: ток через A–P равен $I = \dfrac{U/2}{13R/14} = \dfrac{14}{R}$, $\varphi_P = 26 - 14\cdot\dfrac{1}{2} = 19$; ток в ветви P–S–M — $\dfrac{19-13}{3R/4} = \dfrac{8}{R}$, $\varphi_S = 19 - 8\cdot\dfrac{1}{2} = 15$; ток в ветви через Q — $\dfrac{6}{R}$, $\varphi_Q = 19 - 3 = 16$. Остальные узлы — по симметрии $\varphi(i,j) = 26 - \varphi(3-i, 3-j)$ (рисунок 4). Проверим закон сохранения заряда, например, в узле $(0,2)$: втекает $19 - 15 = 4$, вытекает $(15-13) + (15-13) = 4$ — сходится. Решение полной системы Кирхгофа для 16 узлов на python даёт те же потенциалы и $R_{AB} = 13/7$ Ом.



Потенциалы узлов при $U = 26$ (вычислены): побочная диагональ — ровно $U/2 = 13$.

Обратите внимание. Узлы побочной диагонали не соединены резисторами между собой, но соединить их проводом можно: потенциалы равны, ток по проводу не потечёт, и токи в остальной цепи не изменятся. Так же сливаются пары P и S.

Проверка. Размерность: Ом. Оценка: сопротивление сетки 2×2 между углами $1{,}5R$ (та же процедура: A–P даёт $R/2$, P–M — четыре резистора, $R/4$; $2\cdot\frac{3}{4}R$), у сетки 3×3 путь длиннее, но и параллельных путей больше — $1{,}86R$ немного больше $1{,}5R$, как и ожидалось; кратчайший путь из 6 резисторов даёт $6R$ — параллельные пути уменьшают сопротивление более чем втрое.

Смысл: две симметрии (зеркальная и «поворот со сменой полярности») сводят 24 резистора к пяти эквивалентным.

Ответ. $R_{AB} = \dfrac{13}{7}R = \dfrac{13}{7}$ Ом $\approx 1{,}86$ Ом.