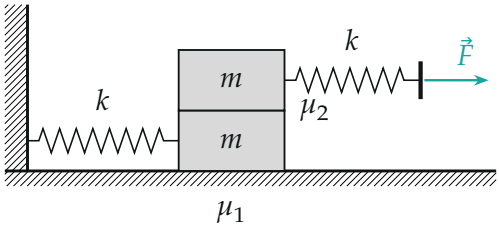
Два бруска и две пружины

Задача 4. [Курчатов 2018/19, 9 класс, задача 4] На полу лежит брусок массой $m = 1$ кг, соединённый первой пружиной жёсткостью $k = 10$ Н/м с неподвижной стенкой. На нём лежит второй такой же брусок, соединённый второй пружиной такой же жёсткости, с ручкой. Сначала обе пружины расслаблены, и ручку начинают тянуть в направлении от стенки, медленно увеличивая силу, пока верхний брусок не двинется с нижнего. Приняв, что коэффициент трения между полом и бруском равен $\mu_1 = 0{,}1$, а между брусками равен $\mu_2 = 0{,}8$, постройте график $x_2(x_1)$, где x_1 — деформация первой пружины, x_2 — деформация второй пружины, и найдите площадь под графиком в см^2.



Поясняющий рисунок: нижний брусок связан пружиной со стенкой, верхний — пружиной с ручкой.

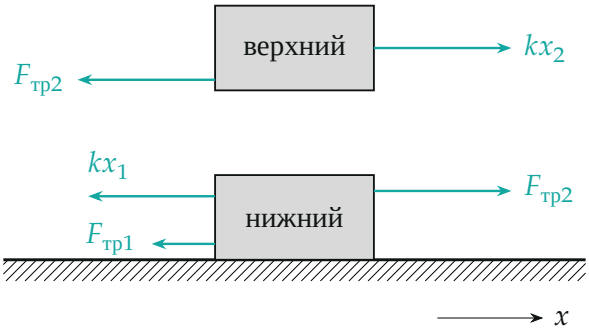
▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на равновесие с трением покоя и скольжения. Ручку тянут медленно, поэтому в любой момент каждый брусок в равновесии (ускорениями пренебрегаем). Сила трения покоя подстраивается под остальные силы, пока не дойдёт до своего максимума μN; это и определяет, когда начинается каждый этап. Пружины — по закону Гука, силы kx_1 и kx_2. Этапов три: (I) бруски стоят, растягивается вторая пружина; (II) бруски едут вместе, растягиваются обе; (III) верхний брусок срывается — здесь график кончается.

Обозначения. x_1, x_2 — удлинения пружин; $F_{\text{тр}1}$ — сила трения пола о нижний брусок, $F_{\text{тр}2}$ — сила трения между брусками; ось x — от стенки, $g = 10$ м/с^2.

1. Силы. По вертикали: верхний брусок давит на нижний с силой mg, пол на нижний — с силой $2mg$ (на нём оба бруска). Поэтому максимальные силы трения

$$F_{\text{тр1}}^{\max} = \mu_1 \cdot 2mg = 0{,}1 \cdot 2 \cdot 10\ \text{Н} = 2\ \text{Н}, \qquad F_{\text{тр2}}^{\max} = \mu_2 mg = 0{,}8 \cdot 10\ \text{Н} = 8\ \text{Н}.$$

Горизонтальные силы на каждый брусок — на рисунке 2: на верхний — kx_2 от второй пружины и трение со стороны нижнего; на нижний — трение со стороны верхнего (по третьему закону Ньютона вправо), kx_1 к стенке и трение пола.



Горизонтальные силы на бруски (верхний отодвинут вверх для наглядности); на этапе II бруски едут вправо.

2. Этап I: бруски стоят. Нижний брусок не сдвинулся, $x_1 = 0$. Первый закон Ньютона для верхнего бруска в проекции на ось x: $F_{\text{тр2}} = kx_2$; для нижнего: $F_{\text{тр1}} = F_{\text{тр2}} = kx_2$. Пол удерживает нижний брусок, пока $kx_2 \leqslant 2$ Н, то есть до

$$x_2 = \frac{2\mu_1 mg}{k} = \frac{2}{10}\ \text{м} = 20\ \text{см}.$$

Верхний брусок при этом не скользит: ему нужно трение $kx_2 \leqslant 2$ Н, а между брусками можно до 8 Н. На графике — вертикальный отрезок от $(0;\ 0)$ до $(0;\ 20\ \text{см})$.

3. Этап II: бруски едут вместе. Нижний брусок медленно движется вправо, трение пола — скольжения, $F_{\text{тр1}} = 2\mu_1 mg$, влево. Первый закон

Ньютона для системы двух брусков в проекции на ось x (трение между брусками — внутренняя сила):

$$kx_2 - kx_1 - 2\mu_1 mg = 0 \quad \Rightarrow \quad x_2 = x_1 + \frac{2\mu_1 mg}{k} = x_1 + 20 \text{ см}.$$

Знак: обе силы, kx_1 и трение пола, тянут к стенке, поэтому вторая пружина растянута сильнее первой на те же 20 см. На графике — прямая с наклоном 1.

4. Конец: верхний брусок срывается. Для верхнего бруска по-прежнему $F_{\text{тр2}} = kx_2$. Он сдвинется относительно нижнего, когда $kx_2 = \mu_2 mg = 8$ Н:

$$x_2^{\text{к}} = \frac{\mu_2 mg}{k} = 80 \text{ см}, \qquad x_1^{\text{к}} = x_2^{\text{к}} - 20 \text{ см} = 60 \text{ см}.$$

Числа сводим в таблицу:

момент	начало	нижний сдвинулся	верхний сорвался
x_1, см	0	0	60
x_2, см	0	20	80

5. График и площадь. График — на рисунке 3. Под вертикальным отрезком площади нет; под наклонным — трапеция с основаниями 20 и 80 см и высотой 60 см:

$$S = \frac{x_2^{(1)} + x_2^{\text{к}}}{2}\, x_1^{\text{к}} = \frac{20 + 80}{2} \cdot 60 \text{ см}^2 = 3000 \text{ см}^2.$$

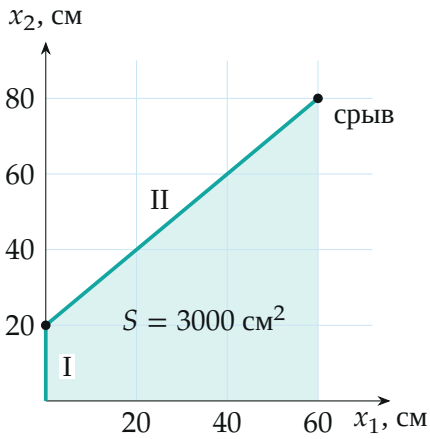
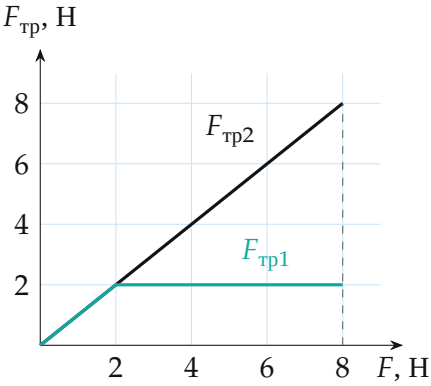


График $x_2(x_1)$: этап I — по оси x_2, этап II — прямая $x_2 = x_1 + 20$ см до срыва верхнего бруска.

6. Как меняется сила на ручке. Сила, которой тянут ручку, равна kx_2 (вторая пружина невесома). На рисунке 4 — силы трения в зависимости от неё: трение пола растёт вместе с F до 2 Н и дальше постоянно, трение между брусками равно F и доходит до 8 Н.



Силы трения в зависимости от силы, приложенной к ручке; при $F = 8$ Н верхний брусок срывается.

Обратите внимание. На этапе II трение пола — уже не «сколько нужно», а сила трения скольжения $2\mu_1 mg$: нижний брусок движется. И пол

давит на нижний брусок с силой $2mg$, а не mg — на нём лежит второй брусок.

Проверка. Размерность: $\dfrac{\mu mg}{k} = \dfrac{\text{Н}}{\text{Н/м}} = \text{м}$. Предельный случай: при $\mu_1 = 0$ вертикального участка нет, $x_2 = x_1$ — пружины растянуты одинаково, как последовательно соединённые; при $\mu_2 < 2\mu_1$ верхний брусок сорвался бы ещё на этапе I, и площадь была бы нулевой.

Смысл: разница удлинений пружин — это постоянная сила трения пола, делённая на k.

Ответ. График: от $(0;\ 0)$ вертикально до $(0;\ 20\ \text{см})$, затем прямая $x_2 = x_1 + \dfrac{2\mu_1 mg}{k}$ до $(60\ \text{см};\ 80\ \text{см})$; площадь под графиком $S = 3000\ \text{см}^2$.