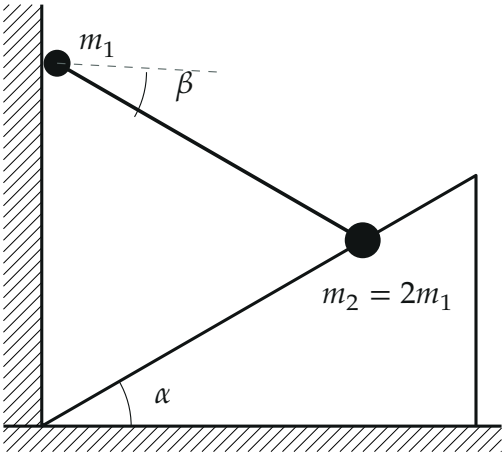
Два груза на наклонной плоскости со стержнем

Задача 5. [Курчатов 2018/19, 9 класс, задача 5] На наклонной плоскости покоятся два груза, соединённые стержнем. Найдите угол между стержнем и горизонтом, если $\alpha = 30°$, а масса правого груза вдвое больше левого.



Поясняющий рисунок (в условии его нет; конфигурация — по уравнениям организаторов): левый груз у гладкой вертикальной стенки, правый — на гладкой наклонной плоскости, стержень упирается в оба.

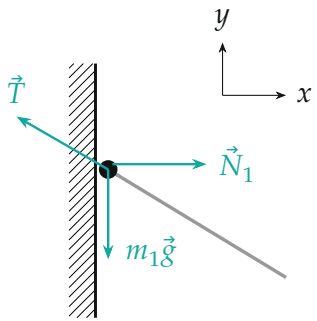
▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на равновесие связанных тел без трения. В условии рисунка нет; по уравнениям официального решения левый груз не имеет опоры снизу и держится только стержнем, значит, он прижат к гладкой вертикальной стенке, а правый лежит на гладкой наклонной плоскости. Стержень лёгкий и сжат, он передаёт силу T вдоль себя. Для каждого груза пишем условие равновесия (первый закон Ньютона) в проекциях.

Обозначения. $m_1 = m$, $m_2 = 2m$; β — угол стержня с горизонтом; T — сила, с которой стержень давит на каждый груз; N_1 — реакция стенки (горизонтальна), N_2 — реакция наклонной плоскости (перпендикулярна ей, под углом α к вертикали). Оси: x — горизонтально вправо, y — вертикально вверх.

1. Левый груз. Силы (рисунок 2): $m_1\vec{g}$ вниз, $\vec{N}_1$ от стенки вправо, $\vec{T}$ от стержня вдоль него вверх-влево. Первый закон Ньютона в проекциях:

$$x:\ N_1 - T\cos\beta = 0, \qquad y:\ T\sin\beta - m_1 g = 0.$$

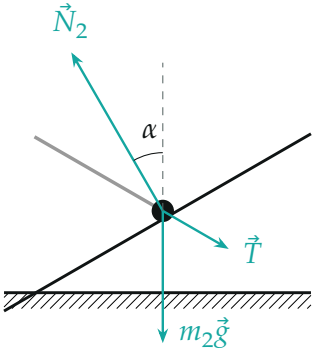
Вертикальная составляющая силы стержня держит левый груз: $T\sin\beta = m_1 g$.



Силы на левый груз; стержень (серый) сжат и давит на груз вверх-влево — от правого груза.

2. Правый груз. Силы (рисунок 3): $m_2\vec{g}$ вниз, $\vec{N}_2$ перпендикулярно плоскости вверх-влево (с вертикалью угол α), $\vec{T}$ от стержня вниз-вправо. Первый закон Ньютона в проекциях:

$$x:\ T\cos\beta - N_2\sin\alpha = 0, \qquad y:\ N_2\cos\alpha - m_2 g - T\sin\beta = 0.$$



Силы на правый груз: реакция плоскости отклонена от вертикали на угол α.

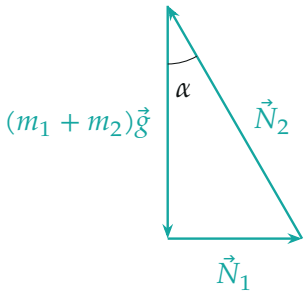
3. Решаем систему. Из уравнения по y для правого груза с учётом $T\sin\beta = m_1 g$:

$$N_2\cos\alpha = m_2 g + m_1 g \quad \Rightarrow \quad N_2 = \frac{(m_1+m_2)g}{\cos\alpha}.$$

Из уравнения по x: $T\cos\beta = N_2\sin\alpha = (m_1+m_2)g\,\mathrm{tg}\,\alpha$. Делим $T\sin\beta = m_1 g$ на это:

$$\mathrm{tg}\,\beta = \frac{m_1}{(m_1+m_2)\,\mathrm{tg}\,\alpha} = \frac{1}{3\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{1}{\sqrt{3}}, \qquad \beta = 30^\circ.$$

4. Второй способ — система целиком. Внешние силы на систему «два груза + стержень» (сила стержня — внутренняя): $(m_1+m_2)\vec{g}$, $\vec{N}_1$, $\vec{N}_2$. Сумма их равна нулю — силы образуют замкнутый треугольник (рисунок 4): вертикальная составляющая N_2 равна $(m_1+m_2)g$, горизонтальная — $N_1 = (m_1+m_2)g\,\mathrm{tg}\,\alpha$. А $N_1 = T\cos\beta$ из пункта 1, и снова $\mathrm{tg}\,\beta = \dfrac{m_1 g}{N_1} = \dfrac{m_1}{(m_1+m_2)\,\mathrm{tg}\,\alpha}$.



Треугольник внешних сил на систему: $N_1 = (m_1+m_2)g\,\mathrm{tg}\,\alpha$.

Обратите внимание. Ответ не зависит от длины стержня и от того, где на плоскости лежит правый груз: при заданных массах угол равновесия один. В нашем числовом случае $\beta = \alpha$: плоскость поднимается вправо под 30°, а стержень под тем же углом опускается к правому грузу.

Проверка. Размерность: $\operatorname{tg}\beta$ безразмерен. Предельные случаи: $m_1 \to 0$ — $\beta \to 0$, стержню незачем поддерживать левый груз, он горизонтален; $\alpha \to 0$ (плоскость горизонтальна) — $\beta \to 90°$: распорки нет, и стержень должен стоять вертикально, держа левый груз прямо над правым. Подстановка $\beta = 30°$: $T = m_1 g / \sin\beta = 2m_1 g$, $N_2 \sin\alpha = 3m_1 g \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\cos 30°} \cdot \frac{1}{2} = \sqrt{3}\, m_1 g = T\cos\beta$ — сходится.

Смысл: стержень должен держать вес левого груза, а горизонтальную распорку ему задаёт наклонная плоскость, нагруженная весом обоих грузов.

Ответ. $\operatorname{tg}\beta = \dfrac{m_1}{(m_1 + m_2)\operatorname{tg}\alpha} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$, $\beta = 30°$.