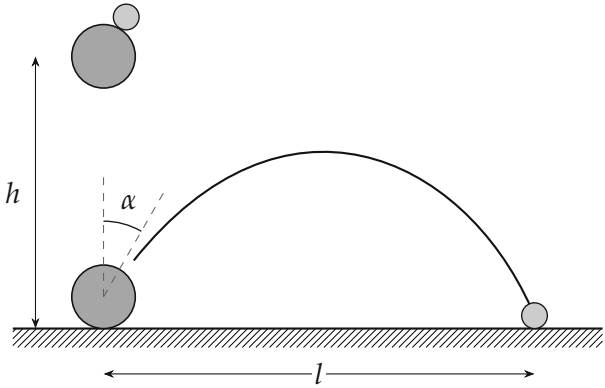
Шар для боулинга и мяч для гольфа

Задача 1. [Курчатов 2019/20, 10 класс, задача 1] Шар для боулинга и мяч для гольфа сбрасывают вместе на плоскую поверхность с высоты h. Мяч для боулинга намного массивнее мяча для гольфа, и радиусы обоих шаров много меньше h. Шар для боулинга сталкивается с поверхностью и сразу после этого с мячом для гольфа: шары сбрасывают так, что все движения перед вторым столкновением являются вертикальными, и мяч для гольфа ударяется о шар для боулинга под углом α от его верхней точки, как показано на рисунке. Все столкновения являются абсолютно упругими, нет трения между шаром для боулинга и мячом для гольфа. После столкновения мяч для гольфа движется при отсутствии сопротивления воздуха и приземляется на расстояние l. Высота $h = 1$ м фиксирована, но α может меняться. Каково максимально возможное значение l и под каким углом α оно достигается?



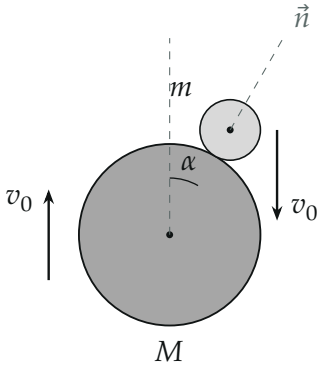
▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на упругий удар и баллистику. Шар для боулинга отскакивает от пола и сразу встречает падающий мяч — они летят навстречу с одинаковыми скоростями v_0. Удобнее всего смотреть на удар из системы отсчёта тяжёлого шара: он там неподвижен, как стенка, и мяч отражается от его поверхности «как свет от зеркала» — по нормали в точке удара. Получив скорость, мяч летит по параболе; дальность зависит от α, и максимум ищем производной.

Обозначения. $M \gg m$ — массы шара и мяча; v_0 — скорость обоих перед полом; $\vec{n}$ — нормаль в точке удара (под углом α к вертикали); $\vec{u}$, $\vec{u}\,'$ — скорость мяча относительно шара до и после удара; $\vec{v}$ — скорость мяча относительно земли после удара; ось x — горизонтально в сторону полёта, y — вверх.

1. Скорость перед ударами: закон сохранения энергии. Шары падают с высоты h без сопротивления:

$$\frac{mv_0^2}{2} = mgh \quad \Rightarrow \quad v_0 = \sqrt{2gh}.$$

Шар упруго ударяется о пол и сразу после этого летит вверх со скоростью v_0; мяч ещё падает со скоростью v_0 вниз (рисунок 2).



Перед вторым ударом: шар M летит вверх, мяч m — вниз, обе скорости v_0; нормаль $\vec{n}$ в точке удара наклонена к вертикали на α.

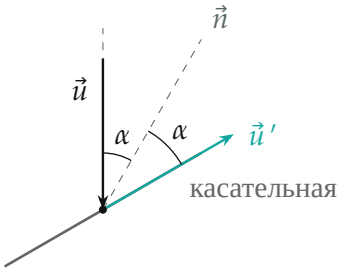
2. Переход в систему отсчёта шара. Шар намного тяжелее мяча, поэтому за время удара его скорость не меняется: система отсчёта шара — инерциальная на время удара (сила тяжести за короткий удар не успевает ничего изменить). В ней мяч налетает со скоростью

$$\vec{u} = \vec{v}_{\text{мяча}} - \vec{v}_{\text{шара}}: \qquad u_x = 0, \quad u_y = -v_0 - v_0 = -2v_0.$$

3. Упругий удар о неподвижную гладкую стенку. Трения нет — сила удара направлена по нормали $\vec{n}$. Касательная к поверхности составляющая скорости $\vec{u}$ не меняется; удар упругий и шар неподвижен, поэтому

нормальная составляющая меняет знак, сохраняя модуль. Значит, $\vec{u}\,'$ — зеркальное отражение $\vec{u}$ относительно нормали: модуль $2v_0$, а угол между $\vec{u}\,'$ и вертикалью равен 2α (рисунок 3). В проекциях:

$$u'_x = 2v_0 \sin 2\alpha, \qquad u'_y = 2v_0 \cos 2\alpha.$$



Удар в системе отсчёта шара: скорость $\vec{u}$ (модуль $2v_0$, вертикально вниз) отражается относительно нормали; угол между $\vec{u}\,'$ и вертикалью 2α.

4. Обратно в систему отсчёта земли: сложение скоростей. $\vec{v} = \vec{u}\,' + \vec{v}_{\text{шара}}$, а шар летит вверх со скоростью v_0:

$$v_x = 2v_0 \sin 2\alpha, \qquad v_y = 2v_0 \cos 2\alpha + v_0 = v_0\,(1 + 2\cos 2\alpha).$$

Мяч летит вверх-вбок, только если $v_y > 0$, то есть $2\alpha < 120°$.

5. Дальность полёта: равноускоренное движение. Радиусы шаров малы по сравнению с h, поэтому мяч стартует практически с уровня пола. Время полёта из $y(t) = v_y t - gt^2/2 = 0$: $t = 2v_y/g$. Дальность

$$l = v_x t = \frac{2v_x v_y}{g} = \frac{4v_0^2}{g} \sin 2\alpha\,(1 + 2\cos 2\alpha),$$

$$l = 8h\,\sin\beta\,(1 + 2\cos\beta), \qquad \beta = 2\alpha.$$

6. Максимум дальности. Приравняем нулю производную по β:

$$\frac{dl}{d\beta} = 8h[\cos\beta\,(1 + 2\cos\beta) - 2\sin^2\beta],$$

$$\frac{dl}{d\beta} = 8h\,(4\cos^2\beta + \cos\beta - 2) = 0.$$

Квадратное уравнение относительно $\cos\beta$; нам нужен корень с $\cos\beta > 0$ (β меньше 90°, иначе $\sin\beta(1 + 2\cos\beta)$ мало):

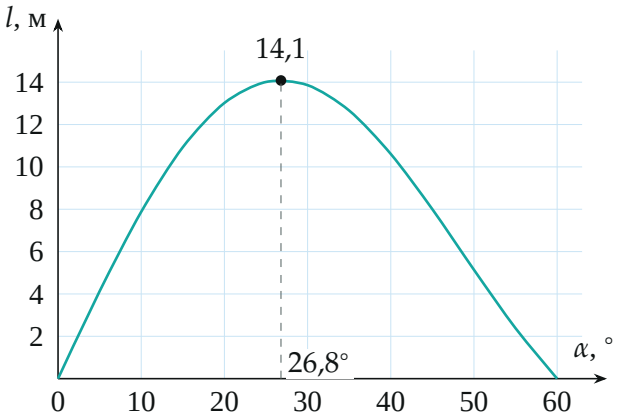
$$\cos\beta = \frac{\sqrt{33} - 1}{8} \approx 0{,}593, \qquad \sin\beta \approx 0{,}805,$$

$$\beta \approx 53{,}6°, \quad \alpha \approx 26{,}8°.$$

Тогда

$$l_{\max} = 8h \cdot 0{,}805 \cdot (1 + 2 \cdot 0{,}593) \approx 14{,}1\,h \approx 14{,}1 \text{ м}.$$

Знак второй производной отрицателен (функция растёт от 0 при $\alpha = 0$ и падает до 0 при $\alpha = 60°$), так что это максимум — рисунок 4.



Дальность полёта мяча при $h = 1$ м в зависимости от угла α, посчитана по $l = 8h\sin 2\alpha(1 + 2\cos 2\alpha)$ через 5°.

Обратите внимание. В системе отсчёта шара мяч налетает со скоростью $2v_0$, а не v_0: это и даёт выигрыш в дальности. При $\alpha = 0$ мяч отскакивает вертикально со скоростью $3v_0$ и поднимается на $9h$ — известный опыт с двумя мячами.

Ответ:

$$l = 8h\sin 2\alpha\,(1 + 2\cos 2\alpha),$$

$$\cos 2\alpha = \frac{\sqrt{33}-1}{8}, \quad \alpha \approx 27^\circ, \qquad l_{\max} \approx 14{,}1\,h = 14{,}1\text{ м}.$$

Проверка. Размерность: v_0^2/g — метры. Предел $\alpha = 0$: $v_x = 0$, $l = 0$, а $v_y = 3v_0$ — верно для лобового удара о массивный шар. Предел $\alpha = 60^\circ$: $v_y = 0$, мяч уходит горизонтально с пола, $l = 0$. Численно (python, перебор α с шагом $0{,}1^\circ$) максимум 14,08 м при $26{,}8^\circ$.

Ответ. $l_{\max} = 8h\sin\beta(1+2\cos\beta) \approx 14{,}1$ м при $\cos 2\alpha = \dfrac{\sqrt{33}-1}{8}$, то есть $\alpha \approx 27^\circ$.