Замена n источников одним

Задача 2. [Курчатов 2019/20, 10 класс, задача 2] Схема содержит n элементов с ЭДС $\mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_n$ и внутренними сопротивлениями $r_1, \dots, r_n$, как показано на рисунке 1. Элементы с $\mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_n$ и $r_1, \dots, r_n$ заменяют на один элемент с ЭДС $\mathcal{E}$ и внутренним сопротивлением r, как показано на рисунке 2, при этом падение напряжения на внешнем резисторе не меняется для любого значения сопротивления R. Найдите зависимость $\mathcal{E}$ и r от $\mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_n$ и $r_1, \dots, r_n$.

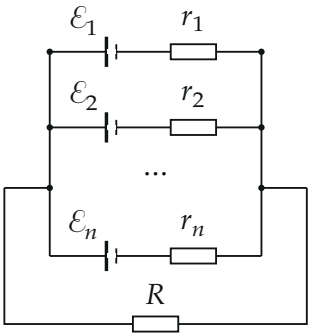


Рис. 1

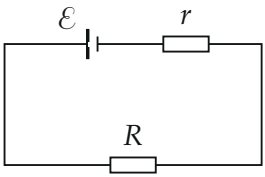


Рис. 2

▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на эквивалентный источник (правила Кирхгофа). Все элементы подключены параллельно к одним и тем же двум узлам, значит, на всех одно и то же напряжение U — то же, что на резисторе R. Ток во внешнюю цепь — сумма токов элементов. Каждый элемент даёт ток, линейно зависящий от U; сумма линейных зависимостей — снова линейная, то есть ведёт себя как один источник. Требование «для любого R» означает, что зависимость тока от напряжения у старой и новой схемы должна совпасть целиком.

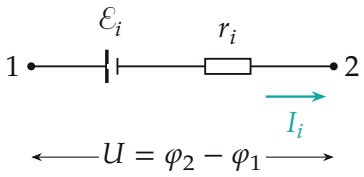
Обозначения. U — напряжение между узлами (на резисторе R); I_i — ток через элемент i (положительный — от «−» к «+» внутри элемента), I — ток через R; $G = \sum 1/r_i$ — суммарная проводимость.

1. Ток одного элемента: закон Ома для участка с ЭДС. Для элемен-

та i, к которому приложено напряжение U (рисунок 2),

$$U = \mathcal{E}_i - I_i r_i \quad \Rightarrow \quad I_i = \frac{\mathcal{E}_i - U}{r_i}.$$

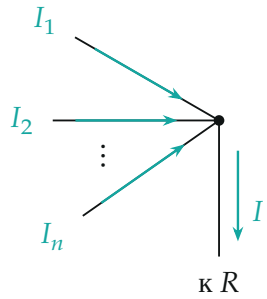
I_i может быть и отрицательным: элемент со слабой ЭДС заряжается от остальных.



Одна ветвь: напряжение U на ней общее для всех ветвей и резистора R; ток I_i — бирюзой.

2. Ток во внешней цепи: первое правило Кирхгофа. Узел, к которому сходятся все ветви:

$$I = \sum_{i=1}^{n} I_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{\mathcal{E}_i}{r_i} - U \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{r_i}.$$



Узел, где сходятся ветви: ток в резистор R равен сумме токов элементов.

3. Ток одного элемента замены. Для схемы на рисунке 2 по той же формуле шага 1:

$$I = \frac{\mathcal{E}}{r} - U \cdot \frac{1}{r}.$$

4. Совпадение при любом R. Задать R — значит выбрать точку на прямой $I(U)$: внешний резистор даёт $U = IR$. Напряжение на R одинаково при всех R только если прямые $I(U)$ шагов 2 и 3 совпадают, то есть равны и свободные члены, и коэффициенты при U:

$$\frac{1}{r} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{r_i}, \qquad \frac{\mathcal{E}}{r} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\mathcal{E}_i}{r_i}.$$

Отсюда

$$r = \frac{1}{\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{r_i}}, \qquad \mathcal{E} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\mathcal{E}_i}{r_i}}{\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{r_i}}.$$

Внутреннее сопротивление — как у параллельно соединённых r_i, а ЭДС — среднее $\mathcal{E}_i$ с весами $1/r_i$: элемент с меньшим сопротивлением сильнее «тянет» общее напряжение к своей ЭДС.

5. Второй способ: проверка через $U(R)$. Из шагов 2 и 3 при $U = IR$:

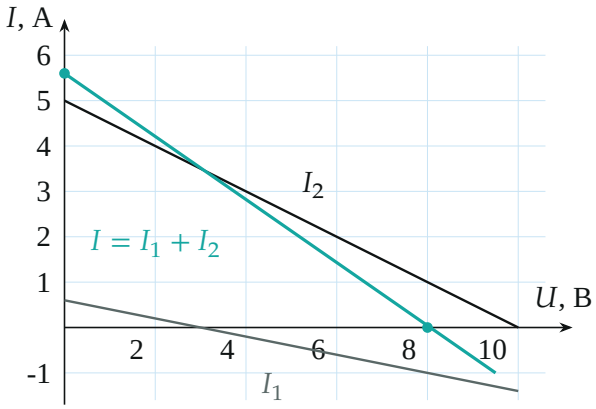
$$U = \frac{\sum \mathcal{E}_i/r_i}{1/R + G}, \qquad U = \frac{\mathcal{E}/r}{1/R + 1/r}.$$

Равенство при всех R (в частности, при $R \to \infty$: $U = \mathcal{E}$ — ЭДС равна напряжению холостого хода; при $R \to 0$: $I = \mathcal{E}/r$ — ток короткого замыкания) снова даёт те же $\mathcal{E}$ и r.

6. Пример на числах. Два элемента: $\mathcal{E}_1 = 3$ В, $r_1 = 5$ Ом; $\mathcal{E}_2 = 10$ В, $r_2 = 2$ Ом. Тогда $G = 0{,}2 + 0{,}5 = 0{,}7$ См,

$$r = \frac{1}{0{,}7} \approx 1{,}43 \text{ Ом}, \qquad \mathcal{E} = \frac{0{,}6 + 5}{0{,}7} = 8 \text{ В}.$$

На рисунке 4 прямые $I_1(U)$ и $I_2(U)$ складываются в прямую $I(U)$, которая пересекает ось U при 8 В и ось I при 5,6 А.



Пример: зависимости тока от напряжения для двух элементов (серая и чёрная) и их сумма (бирюзовая) — снова прямая, как у одного источника с $\mathcal{E} = 8$ *В и* $r \approx 1{,}43$ *Ом.*

Обратите внимание. ЭДС не складываются и не усредняются просто так: усреднение — с весами $1/r_i$. При равных $r_i = r_0$ получаем привычное $\mathcal{E} = \frac{1}{n}\sum \mathcal{E}_i$ и $r = r_0/n$.

Ответ:

$$\mathcal{E} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\mathcal{E}_i}{r_i}}{\sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{1}{r_i}}, \qquad r = \frac{1}{\sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{1}{r_i}}.$$

Проверка. Размерность: $\mathcal{E}$ — (В/Ом)/(1/Ом) = В, r — Ом. Предел $n = 1$: $\mathcal{E} = \mathcal{E}_1$, $r = r_1$. Одинаковые элементы: $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0$, $r = r_0/n$ — батарея параллельных одинаковых элементов. Если $r_k \to 0$, то $\mathcal{E} \to \mathcal{E}_k$: идеальный источник задаёт напряжение сам.

Ответ. $\mathcal{E} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} \mathcal{E}_i/r_i}{\sum_{i=1}^{n} 1/r_i}, \quad r = \dfrac{1}{\sum_{i=1}^{n} 1/r_i}.$