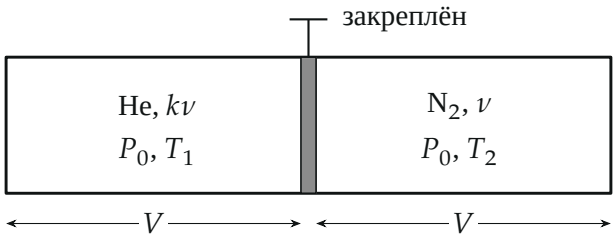
Гелий и азот по разные стороны поршня

Задача 3. [Курчатов 2019/20, 10 класс, задача 3] Горизонтальный цилиндр разделён пополам теплопроводящим поршнем. В одной половине находится гелий, в другой азот N_2. Отношение k числа молей гелия к числу молей азота равно 3. Сначала поршень закреплён, и газы медленно обмениваются теплом. В момент, когда давления газов (но не их температуры) становятся одинаковыми и равными $P_0 = 0{,}35$ МПа, поршень отпускают. Найдите давление P газов в конечном состоянии механического и теплового равновесия. Стенки цилиндра не проводят тепло, поршень движется без трения.



Поясняющий рисунок: момент, когда поршень отпускают — давления равны P_0, температуры ещё разные.

▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на первый закон термодинамики для замкнутой системы. Цилиндр теплоизолирован, а внешних тел, совершающих работу, нет: поршень лишь передаёт работу от одного газа другому. Поэтому суммарная внутренняя энергия газов не меняется — это главный закон задачи. После того как поршень отпустят, газы выравнивают температуру (через поршень) и давление (поршень сдвигается). Конечное давление найдём из сохранения энергии и уравнений состояния, не выясняя, как именно шёл процесс.

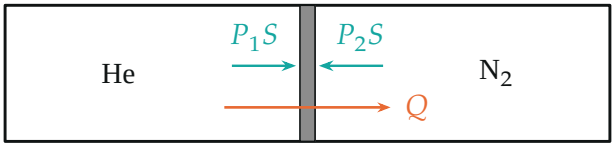
Обозначения. ν — молей азота, $k\nu$ — гелия; V — начальный объём каждой половины; T_1, T_2 — начальные температуры гелия и азота; P, T — конечные давление и температура; V_1, V_2 — конечные объёмы гелия и азота.

1. Сохранение внутренней энергии: первый закон термодинамики. Для каждого газа $Q_i = \Delta U_i + A_i$. Сложим:

$$Q_1 + Q_2 = \Delta U_1 + \Delta U_2 + A_1 + A_2.$$

Газы обмениваются теплом только друг с другом (стенки не проводят тепло): $Q_1 + Q_2 = 0$. Поршень в начале и в конце покоится, его кинетическая энергия не изменилась, значит, полная работа сил давления на поршень равна нулю: $A_1 + A_2 = 0$ (сколько работы совершил один газ, столько получил другой). Итак,

$$U_1 + U_2 = \text{const}.$$



Поршень передаёт работу (силы давления газов, бирюзой) и тепло (через теплопроводящий поршень) от одного газа к другому; наружу не уходит ни то, ни другое.

2. Внутренняя энергия через давление и объём. Гелий одноатомный ($U = \frac{3}{2}\nu RT$), азот двухатомный ($U = \frac{5}{2}\nu RT$). По уравнению Менделеева — Клапейрона $\nu RT = PV$ для каждого газа, поэтому

$$U_{\text{He}} = \frac{3}{2}PV_{\text{He}}, \qquad U_{\text{N}_2} = \frac{5}{2}PV_{\text{N}_2}.$$

Сначала у обоих газов давление P_0 и объём V:

$$U_{\text{нач}} = \frac{3}{2}P_0V + \frac{5}{2}P_0V = 4P_0V.$$

Неравные температуры здесь не мешают: в PV они уже «спрятаны».

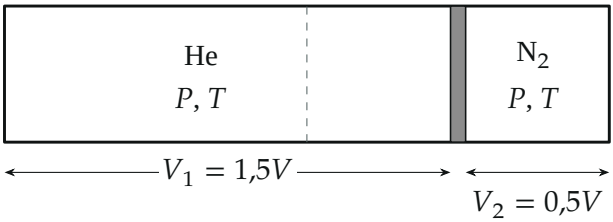
3. Конечные объёмы: уравнения состояния при общей T. В конце давление и температура у газов общие, поэтому объёмы относятся как

числа молей:

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{k\nu RT/P}{\nu RT/P} = k, \qquad V_1 + V_2 = 2V,$$

$$V_1 = \frac{2k}{k+1}V, \quad V_2 = \frac{2}{k+1}V.$$

При $k = 3$: $V_1 = 1{,}5V$, $V_2 = 0{,}5V$ — поршень уедет в сторону азота (рисунок 3).



Конечное состояние: давления и температуры равны, гелия втрое больше — он занимает втрое больший объём. Пунктир — начальное положение поршня.

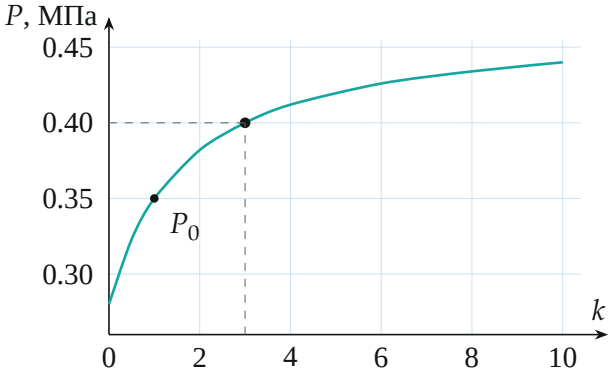
4. Конечное давление. Приравняем энергию в начале (шаг 2) и в конце:

$$4P_0V = \frac{3}{2}PV_1 + \frac{5}{2}PV_2 = PV\,\frac{3k+5}{k+1} \quad \Rightarrow \quad P = \frac{4(k+1)}{3k+5}\,P_0.$$

При $k = 3$:

$$P = \frac{4\cdot 4}{14}\cdot 0{,}35\ \text{МПа} = \frac{8}{7}\cdot 0{,}35\ \text{МПа} = 0{,}40\ \text{МПа}.$$

Давление выросло. Энергия, приходящаяся на единицу PV, у гелия $\frac{3}{2}$, у азота $\frac{5}{2}$. В начале газы делили PV поровну (среднее 2), в конце гелий занимает три четверти объёма (среднее $\frac{3k+5}{2(k+1)} = \frac{7}{4}$). При той же энергии меньший множитель означает большее $P\cdot 2V$.



Конечное давление в зависимости от отношения молей k по формуле $P = 4P_0(k+1)/(3k+5)$; точка — условие задачи, $k = 3$.

Обратите внимание. Нельзя считать, что сохраняется температура или PV системы: сохраняется только энергия, а у гелия и азота разные теплоёмкости. При $k = 1$ (поровну молей) поршень остаётся на месте и $P = P_0$ (рисунок 4), а при $k \neq 1$ давление меняется.

Ответ:

$$P = \frac{4(k+1)}{3k+5} P_0 = 0{,}4 \text{ МПа}.$$

Проверка. Размерность: P выражено через P_0 безразмерным множителем. Предел $k \to 0$ (только азот): $P = \frac{4}{5}P_0$; $k \to \infty$ (только гелий): $P = \frac{4}{3}P_0$. Второй способ для $k = 3$: пусть $\nu = 1$, $RT_1 = P_0V/3$, $RT_2 = P_0V$; энергия $\frac{3}{2} \cdot 3 \cdot \frac{P_0V}{3} + \frac{5}{2}P_0V = 4P_0V$, конечная T: $(\frac{9}{2} + \frac{5}{2})RT = 4P_0V$, $RT = \frac{4}{7}P_0V$, и $P = \frac{4RT}{2V} = \frac{8}{7}P_0$ — совпало.

Ответ. $P = \dfrac{4(k+1)}{3k+5} P_0 = 0{,}4$ МПа.