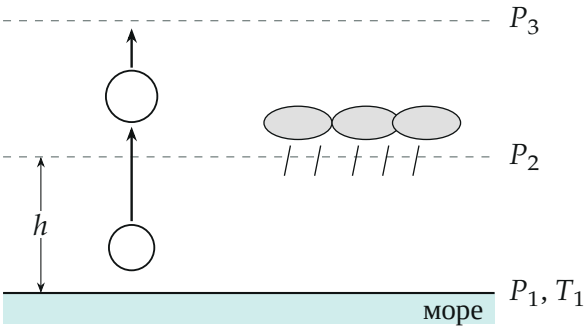
Облака в поднимающемся воздухе

Задача 4. [Курчатов 2019/20, 10 класс, задача 4] Влажный воздух адиабатически поднимается от поверхности моря вверх. Давление у поверхности моря равно $P_1 = 100$ кПа, температура воздуха — 298 К. На высоте, на которой давление становится равным $P_2 = 85$ кПа, начинают образовываться облака и начинает идти дождь. 1 кг влажного воздуха теряет $\Delta m = 2{,}5$ г воды в виде дождя по достижении высоты, давление на которой равно $P_3 = 70$ кПа. Удельную теплоту испарения воды принять равной $\lambda = 2500$ кДж/кг, считать, что на всём диапазоне высот плотность воздуха меняется линейно. Пренебречь влиянием паров воды на плотность воздуха, воздух считать идеальным двухатомным газом с плотностью $\rho_1 = 1{,}189$ кг/м^3. Найти:

1. Температуру воздуха на высоте, где начинают появляться облака.
2. Найти высоту, на которой начинают появляться облака.
3. Найти температуру на высоте, где давление равно 70 кПа.

Примечание: для адиабатического процесса верно $PV^\gamma = \text{const}$, где P — давление, V — объём, γ — показатель адиабаты. Для воздуха можно принять $\gamma = 7/5$, теплоёмкость при постоянном объёме $C_V = \frac{5}{2}R$, где $R = 8{,}31$ Дж/(моль·К) — универсальная газовая постоянная.



Поясняющий рисунок: порция воздуха поднимается и расширяется; выше уровня P_2 пар конденсируется — облака и дождь.

▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на адиабатный процесс и равновесие атмосферы. Поднимаясь, воздух попадает в область меньшего

давления, расширяется и совершает работу за счёт внутренней энергии — остывает (теплом с окружающим воздухом обменяться не успевает). На уровне P_2 он остыл настолько, что пар стал насыщенным — начинаются облака. Выше пар конденсируется и отдаёт воздуху теплоту $\lambda\Delta m$, поэтому воздух остывает медленнее, чем сухой. Высоту облаков найдём из условия равновесия столба воздуха: разность давлений держит его вес.

Обозначения. $T_1 = 298$ К; T_2, ρ_2 — температура и плотность на уровне облаков; h — высота облаков; T_a — температура на уровне P_3 без учёта конденсации, δT — добавка от теплоты конденсации; M — молярная масса воздуха; c_p — удельная теплоёмкость при постоянном давлении.

Пункт 1. Температура на уровне облаков: адиабата и уравнение состояния. Для порции воздуха массы m: $PV^\gamma = \text{const}$ и $PV = \frac{m}{M}RT$. Выразим V из второго и подставим в первое: $P^{1-\gamma}T^\gamma = \text{const}$, то есть

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = \left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{2/7} \quad \Rightarrow \quad T_2 = 298 \cdot 0{,}85^{2/7} \approx 284{,}5 \text{ К}.$$

Знак: давление упало — температура упала, на 13,5 К.

Пункт 2. Высота облаков.

2а. Плотность на уровне облаков: уравнение Менделеева — Клапейрона. $\rho = PM/(RT)$, поэтому $P/(\rho T)$ одинаково на всех высотах:

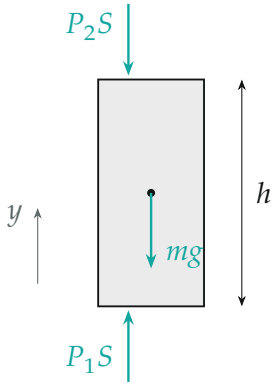
$$\rho_2 = \rho_1 \frac{P_2}{P_1}\frac{T_1}{T_2} = 1{,}189 \cdot 0{,}85 \cdot \frac{298}{284{,}5} \approx 1{,}059 \text{ кг/м}^3.$$

Здесь считаем, что окружающая атмосфера имеет ту же температуру, что и поднимающийся воздух (так и задумано в условии: плотность воздуха меняется с высотой вместе с ним).

2б. Равновесие столба воздуха: второй закон Ньютона. Выделим вертикальный столб воздуха с основанием S от уровня моря до высоты h (рисунок 2). Он покоится: снизу его подпирает сила P_1S, сверху давит

P_2S, вниз тянет сила тяжести mg. В проекции на вертикальную ось:

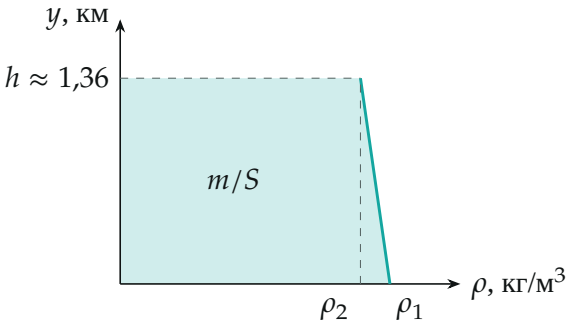
$$P_1S - P_2S - mg = 0.$$



Столб воздуха высоты h с основанием S: снизу давит P_1S, сверху P_2S, вниз — вес.

2в. Масса столба при линейной плотности. Плотность меняется с высотой линейно от ρ_1 до ρ_2, поэтому масса — это площадь трапеции на графике $\rho(y)$ (рисунок 3), умноженная на S:

$$m = S\int_0^h \rho\, dy = Sh\,\frac{\rho_1 + \rho_2}{2}.$$



Плотность воздуха линейно убывает с высотой; площадь под прямой — масса столба на единицу площади основания.

2г. Высота. Подставим массу в условие равновесия:

$$P_1 - P_2 = gh\frac{\rho_1 + \rho_2}{2} \quad \Rightarrow \quad h = \frac{2(P_1 - P_2)}{g(\rho_1 + \rho_2)},$$

$$h = \frac{2 \cdot 15\,000}{9{,}8 \cdot (1{,}189 + 1{,}059)}\ \text{м} \approx 1{,}36\ \text{км}.$$

Пункт 3. Температура на уровне P_3.

3а. Без конденсации — та же адиабата.

$$T_a = T_1\left(\frac{P_3}{P_1}\right)^{2/7} = 298 \cdot 0{,}7^{2/7} \approx 269{,}1\ \text{К}.$$

3б. Нагрев теплотой конденсации: уравнение теплового баланса. Масса пара в 1 кг воздуха мала, поэтому выделение теплоты и адиабатное расширение можно рассматривать как два независимых вклада (так задумано в условии). На килограмм воздуха конденсация даёт $\lambda\Delta m$; нагрев идёт при практически постоянном давлении, поэтому нужна удельная теплоёмкость при постоянном давлении:

$$c_p = \frac{C_V + R}{M} = \frac{7R}{2M},$$

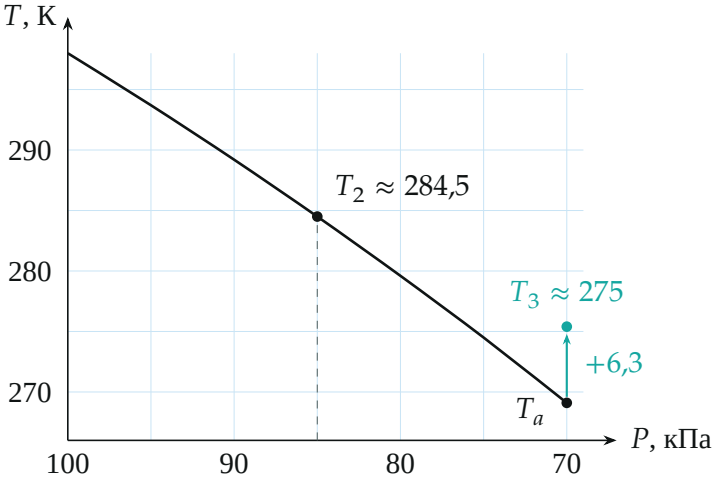
$$M = \frac{\rho_1 R T_1}{P_1} = \frac{1{,}189 \cdot 8{,}31 \cdot 298}{10^5} \approx 0{,}0294\ \text{кг/моль},$$

$$c_p \approx 990\ \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}, \qquad \delta T = \frac{\lambda\Delta m}{c_p \cdot 1\ \text{кг}} = \frac{2{,}5 \cdot 10^6 \cdot 2{,}5 \cdot 10^{-3}}{990} \approx 6{,}3\ \text{К}.$$

3в. Итог.

$$T_3 = T_1\left(\frac{P_3}{P_1}\right)^{2/7} + \frac{\lambda\Delta m}{c_p} \approx 269{,}1 + 6{,}3 \approx 275\ \text{К}.$$

На рисунке 4 — сухая адиабата $T(P)$ и точка с учётом конденсации: облачный воздух на уровне P_3 теплее сухого на 6 К.



Температура поднимающегося воздуха в зависимости от давления: сухая адиабата $T = 298\,(P/100)^{2/7}$ (посчитана по точкам через 5 кПа) и поправка от теплоты конденсации на уровне $P_3 = 70$ кПа.

Обратите внимание. Для нагрева берётся c_p, а не c_V: порция воздуха греется, оставаясь при давлении окружающей атмосферы, и расширяется. Сложение двух вкладов — приближение: теплота выделяется по пути от P_2 до P_3 и сама частично «съедается» дальнейшим расширением; поправка не больше $1 - (70/85)^{2/7} \approx 5\,\%$ от 6 К, то есть $\sim 0{,}3$ К.

Ответ:

$$T_2 = T_1\Big(\frac{P_2}{P_1}\Big)^{2/7} \approx 284{,}5\text{ К}, \qquad h = \frac{2(P_1 - P_2)}{g(\rho_1 + \rho_2)} \approx 1{,}36\text{ км},$$

$$T_3 = T_1\Big(\frac{P_3}{P_1}\Big)^{2/7} + \frac{\lambda \Delta m}{c_p} \approx 275\text{ К}.$$

Проверка. Размерность: $\frac{P}{g\rho}$ — $\frac{\text{Н/м}^2}{(\text{м/с}^2)(\text{кг/м}^3)}$ = м; $\frac{\lambda \Delta m}{c_p}$ — К. Оценка: сухоадиабатический градиент $g/c_p \approx 9{,}9$ К/км, на 1,36 км — 13,5 К, ровно $T_1 - T_2$ из пункта 1. Без дождя ($\Delta m = 0$) $T_3 = T_a$ — обычная адиабата.

Ответ. 1) $T_2 = T_1(P_2/P_1)^{2/7} \approx 284{,}5$ К; 2) $h = \frac{2(P_1 - P_2)}{g(\rho_1 + \rho_2)} \approx 1{,}36$ км

($\rho_2 \approx 1{,}06$ кг/м^3); 3) $T_3 = T_1(P_3/P_1)^{2/7} + \dfrac{\lambda \Delta m}{c_p} \approx 269{,}1 + 6{,}3 \approx 275$ К.