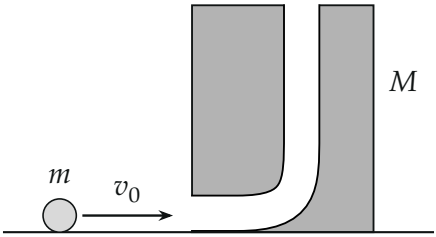
Шар в подвижном кубе с отверстиями

Задача 5. [Курчатов 2019/20, 10 класс, задача 5] В кубе массы M просверлено отверстие так, что шар массы m может войти горизонтально, а затем пройти через куб и вылететь вертикально вверх. Шар и куб расположены на поверхности без трения, куб изначально находится в покое. Рассмотрим ситуацию, в котором шар движется горизонтально со скоростью v_0. Шар попадает в куб и выбрасывается из верхней части куба. Предположим, что нет потерь на трение, когда шар проходит через куб, и шар поднимается на высоту, намного превышающую размеры куба. Затем шар возвращается на уровень куба, где он входит в верхнее отверстие, а затем выбрасывается из бокового отверстия. Определите время возврата шарика в положение, в котором происходит первоначальное столкновение, в терминах отношения масс $\beta = \dfrac{M}{m} > 0$, скорости v_0 и ускорения свободного падения g.



▲ **Решение.** **Что происходит.** Это задача на законы сохранения импульса и энергии. Пока шар идёт по изогнутому каналу, горизонтально он движется вместе с кубом; горизонтальный импульс системы «шар + куб» сохраняется (пол гладкий, внешние силы вертикальны), а энергия сохраняется, потому что трения нет. Вылетев вверх, шар имеет ту же горизонтальную скорость, что и куб, — значит, падает он точно в верхнее отверстие. Второе прохождение — первое «наоборот»: шар вылетает из бокового отверстия назад, и чтобы он вернулся к месту первого удара, его скорость после вылета должна быть направлена назад.

Обозначения. v_1 — общая горизонтальная скорость шара и куба после первого прохождения; v_2 — вертикальная скорость шара при вылете вверх; t_2 — время полёта шара вверх и вниз; x — путь шара и куба по горизонтали за это время; v_3 — горизонтальная скорость шара после второго прохождения; t_3 — время его обратного пути; ось x — по v_0.

1. Горизонтальная скорость после первого прохождения: закон сохранения импульса. Система «шар + куб» в проекции на ось x: внешние силы (тяжесть, реакция гладкого пола) вертикальны. В момент вылета шар движется вертикально относительно куба, то есть горизонтально — со скоростью куба:

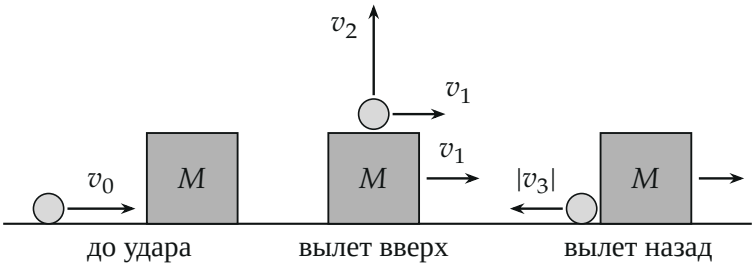
$$mv_0 = (m+M)v_1 \quad \Rightarrow \quad v_1 = \frac{m}{m+M}v_0 = \frac{v_0}{1+\beta}.$$

2. Вертикальная скорость: закон сохранения энергии. Трения нет, стенки канала гладкие — механическая энергия системы сохраняется; разность высот входа и выхода мала по сравнению с высотой подъёма, её не учитываем:

$$\frac{mv_0^2}{2} = \frac{Mv_1^2}{2} + \frac{m(v_1^2+v_2^2)}{2},$$

$$v_2^2 = v_0^2 - \frac{(m+M)}{m}v_1^2 = v_0^2\Big(1 - \frac{m}{m+M}\Big),$$

$$v_2 = v_0\sqrt{\frac{M}{m+M}} = v_0\sqrt{\frac{\beta}{1+\beta}}.$$

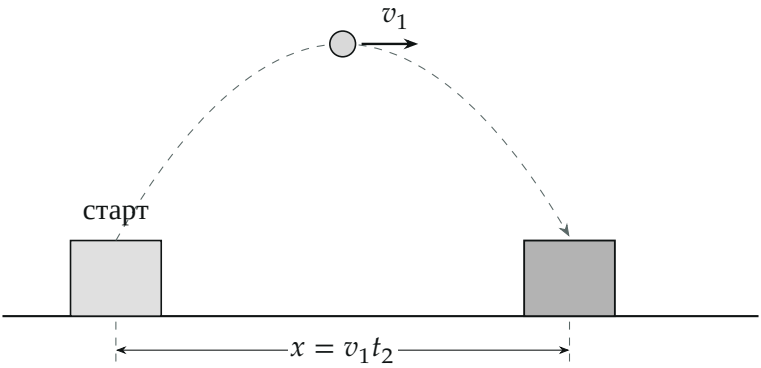


Три момента: шар налетает на куб; вылетает вверх, имея горизонтальную скорость куба v_1; после второго прохождения вылетает назад.

3. Полёт вверх и вниз. В полёте на шар действует только сила тяжести (вертикальна), куб едет без трения — горизонтальные скорости обоих остаются v_1, и шар падает в то же отверстие. Время полёта и путь по горизонтали:

$$t_2 = \frac{2v_2}{g}, \qquad x = v_1 t_2 = \frac{2v_1 v_2}{g}.$$

Время внутри куба по сравнению с t_2 мало (шар поднимается намного выше размеров куба).



Полёт шара: по горизонтали он всё время над серединой куба (скорость v_1 у обоих) и через время t_2 попадает в верхнее отверстие; за это время куб проехал x.

4. Второе прохождение: импульс и энергия снова. Теперь шар входит сверху и выходит сбоку горизонтально. Для системы «шар + куб» до и после второго прохождения: горизонтальный импульс mv_0 и энергия $\frac{mv_0^2}{2}$ (вертикальная скорость шара на входе снова v_2) те же, что в самом начале. Пусть после вылета шар имеет скорость v_3, куб — V:

$$mv_3 + MV = mv_0, \qquad mv_3^2 + MV^2 = mv_0^2.$$

Это уравнения упругого удара; решения: $v_3 = v_0$ (шар просто прошёл

бы вперёд — но канал выводит его через боковое отверстие назад) и

$$v_3 = \frac{m-M}{m+M}\,v_0 = -\frac{\beta-1}{\beta+1}\,v_0, \qquad V = \frac{2m}{m+M}\,v_0.$$

Шар летит назад ($v_3 < 0$), только если $\beta > 1$: куб тяжелее шара. При $\beta < 1$ шар катится вперёд и к месту первого удара не вернётся.

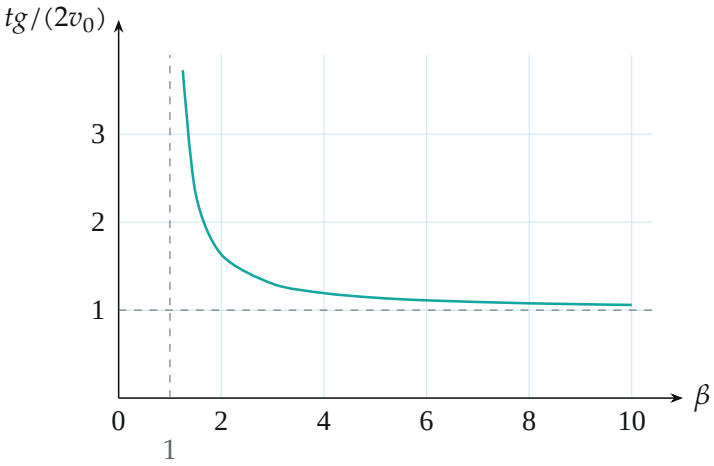
5. Обратный путь и полное время. Шар вылетает назад в точке x и катится к началу со скоростью $|v_3|$:

$$t_3 = \frac{x}{|v_3|} = \frac{2v_2}{g}\cdot\frac{v_1}{|v_3|} = \frac{2v_2}{g}\cdot\frac{1}{\beta-1}.$$

Полное время (время в кубе не учитываем):

$$t = t_2 + t_3 = \frac{2v_2}{g}\left(1+\frac{1}{\beta-1}\right) = \frac{2v_2}{g}\cdot\frac{\beta}{\beta-1},$$

$$t = \frac{2v_0}{g}\sqrt{\frac{\beta}{1+\beta}}\cdot\frac{\beta}{\beta-1}.$$



Время возврата в единицах $2v_0/g$ в зависимости от $\beta = M/m$ (посчитано по формуле ответа): при $\beta \to 1$ шар едва откатывается назад, время растёт

без предела; при $\beta \to \infty$ стремится к $2v_0/g$.

Обратите внимание. Условие $\beta > 0$ в задаче не достаточно: вернуться шар может только при $\beta > 1$. Скорость шара в полёте — не v_0: часть энергии ушла кубу, и вертикальная скорость $v_2 = v_0\sqrt{\beta/(1+\beta)}$ меньше v_0.

Ответ:

$$t = \frac{2v_0}{g}\sqrt{\frac{\beta}{1+\beta}} \cdot \frac{\beta}{\beta - 1} \qquad (\beta > 1).$$

Проверка. Размерность: v_0/g — секунды. Предел $\beta \to \infty$ (куб неподвижен): $t \to 2v_0/g$ — шар взлетает со скоростью v_0, падает обратно, куб не сдвинулся, $t_3 = 0$, верно. Второй способ для $\beta = 3$: $v_1 = v_0/4$, $v_2 = v_0\sqrt{3}/2$, $t_2 = \sqrt{3}\,v_0/g$, $x = \sqrt{3}\,v_0^2/(4g)$, $|v_3| = v_0/2$, $t_3 = \sqrt{3}\,v_0/(2g)$, $t = 1{,}5\sqrt{3}\,v_0/g \approx 2{,}60\,v_0/g$; формула: $2 \cdot 0{,}866 \cdot 1{,}5 = 2{,}60$ — совпало.

Ответ. $t = \dfrac{2v_0}{g}\sqrt{\dfrac{\beta}{1+\beta}} \cdot \dfrac{\beta}{\beta - 1}$; возврат возможен только при $\beta > 1$.