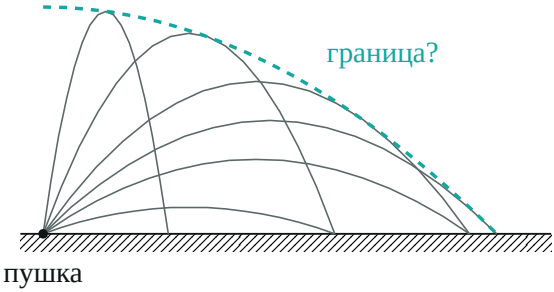
Граница простреливаемой области

Задача 1. [Курчатов 2019/20, 11 класс, задача 1] Пусть имеется пушка на поверхности земли, которая может выпускать снаряд со скоростью v_0 под любым углом к горизонту. Определите границу «простреливаемой» области: получите уравнение кривой, которая разделяет вертикальную плоскость на точки, достижимые для попадания снарядом, и на те, в которые снаряд не попадёт ни в каком случае. Ускорение свободного падения равно g, сопротивлением воздуха пренебречь.



Поясняющий рисунок: траектории снарядов с одной скоростью v_0 под разными углами; все они лежат под общей огибающей — границей области.

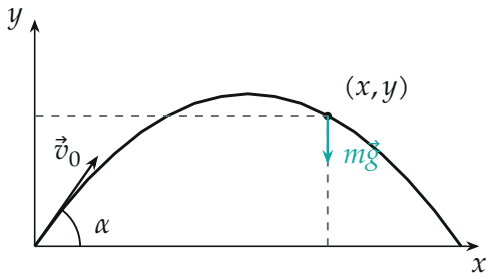
▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на движение тела, брошенного под углом к горизонту, и на поиск экстремума. Через данную точку (x, y) проходит траектория снаряда, если найдётся подходящий угол выстрела. Уравнение траектории квадратное относительно $\operatorname{tg}\alpha$: у точки внутри области два угла (навесная и настильная траектории), снаружи — ни одного, на границе — ровно один. Значит, граница — там, где дискриминант равен нулю.

Обозначения. Начало координат — в пушке, ось x горизонтально (в сторону выстрела), ось y вертикально вверх; α — угол выстрела к горизонту, $p = \operatorname{tg}\alpha$; t — время полёта; (x, y) — точка, в которую хотим попасть.

1. Закон движения снаряда: второй закон Ньютона. На снаряд действует только сила тяжести, поэтому $\vec{a} = \vec{g}$: по x движение равномерное,

по y — равноускоренное с ускорением $-g$ (рисунок 2):

$$x = v_0 \cos\alpha \cdot t, \qquad y = v_0 \sin\alpha \cdot t - \frac{gt^2}{2}.$$



Снаряд, выпущенный под углом α со скоростью v_0; на него действует только сила тяжести.

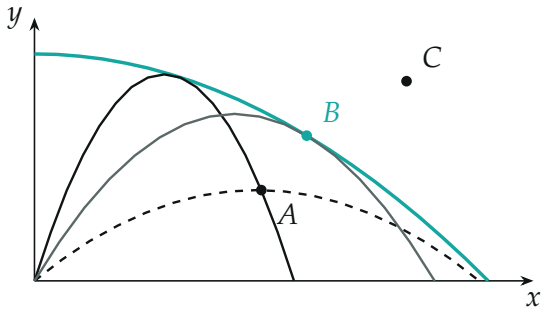
2. Уравнение траектории. Исключим время: $t = \dfrac{x}{v_0 \cos\alpha}$, и подставим в y. Учтём $\dfrac{1}{\cos^2\alpha} = 1 + \operatorname{tg}^2\alpha$:

$$y = x \operatorname{tg}\alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2\alpha} = xp - \frac{gx^2}{2v_0^2}(1 + p^2).$$

3. Уравнение для угла выстрела. Пусть точка (x, y) задана, а угол ищем. Перенесём всё в одну сторону — получится квадратное уравнение относительно p:

$$\frac{gx^2}{2v_0^2} p^2 - x\,p + \left(y + \frac{gx^2}{2v_0^2}\right) = 0.$$

Каждый его корень — угол, под которым надо выстрелить, чтобы попасть в точку. Два корня — две траектории (настильная и навесная), один — единственная траектория, корней нет — точка недостижима (рисунок 3).



В точку A ведут две траектории (два корня), в точку B на границе — одна (тонкая серая, касается границы), в точку C — ни одной. Построено для $v_0^2/g = 1$.

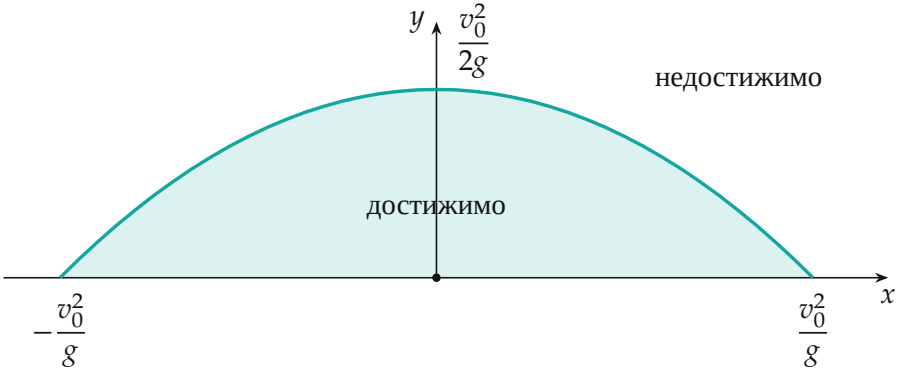
4. Условие единственного корня: дискриминант равен нулю. Точки с двумя корнями и точки без корней разделяет кривая, на которой корень один:

$$D = x^2 - 4 \cdot \frac{gx^2}{2v_0^2}\left(y + \frac{gx^2}{2v_0^2}\right) = 0.$$

При $x \neq 0$ сократим на x^2:

$$1 - \frac{2g}{v_0^2}\left(y + \frac{gx^2}{2v_0^2}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{g}{2v_0^2}\,x^2.$$

Точки с $D > 0$, то есть ниже этой кривой, достижимы; выше ($D < 0$) — нет. Направление выстрела по горизонтали любое, поэтому граница симметрична относительно вертикали через пушку: в формуле только x^2.



Граница простреливаемой области — парабола безопасности: вершина на высоте $v_0^2/(2g)$, пересечение с землёй на дальности v_0^2/g.

Обратите внимание. Граница сама является параболой, но это не траектория снаряда: каждая траектория касается её в одной точке (рисунок 3, точка B); угол выстрела в точку границы — единственный корень $p = \frac{x}{2}\cdot\frac{2v_0^2}{gx^2}$, то есть $\operatorname{tg}\alpha = \frac{v_0^2}{gx}$. Точки на самой границе тоже достижимы — ровно одним выстрелом.

Ответ: $y = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{g}{2v_0^2}x^2$; достижимы точки, для которых $y \le \frac{v_0^2}{2g} - \frac{gx^2}{2v_0^2}$.

Проверка. Размерность: $\frac{v_0^2}{g}$ и $\frac{gx^2}{v_0^2}$ — метры. Частные случаи: при $x = 0$ получаем $y = \frac{v_0^2}{2g}$ — наибольшая высота при выстреле вертикально вверх (закон сохранения энергии $\frac{mv_0^2}{2} = mgh$); при $y = 0$ получаем $x = \frac{v_0^2}{g}$ — наибольшая дальность (выстрел под 45°, $L = \frac{v_0^2\sin 2\alpha}{g}$). Второй способ (геометрия): уравнение $x^2 + y^2 = \left(\frac{v_0^2}{g} - y\right)^2$ после раскрытия скобок даёт ту же формулу. Значит, граница — парабола с фокусом в

пушке и директрисой на высоте $\frac{v_0^2}{g}$: каждая её точка одинаково удалена от пушки и от этой прямой.

Ответ. $y(x) = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{g}{2v_0^2}x^2$ (ниже этой кривой — достижимые точки, выше — нет).