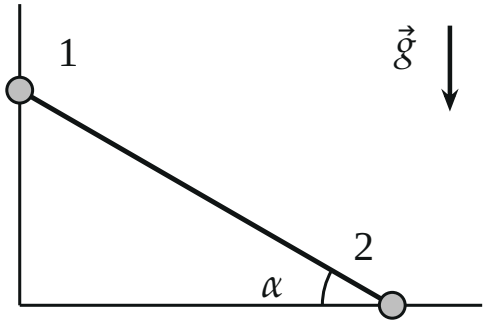
Бусинки на проволочном угле

Задача 2. [Курчатов 2019/20, 11 класс, задача 2] Из тонкой проволоки согнут прямой угол, неподвижно закреплённый так, что одна из его сторон вертикальна. По сторонам угла могут скользить без трения маленькие бусинки 1 и 2 одинаковой массы. Бусинки соединены жёстким невесомым стержнем длины $L = 0{,}75$ м. При движении стержень может свободно поворачиваться вокруг точек крепления к бусинкам. В начальном положении бусинки неподвижны, стержень наклонён к горизонту под углом $\alpha = 30°$. Стержень с бусинками отпускают без толчка. Найдите максимальную скорость V, до которой разгонится бусинка 2 при движении бусинки 1 вниз. Бусинки считайте материальными точками. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2. Ответ выразите в м/с и округлите до сотых.



▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на закон сохранения энергии в системе со связью и на поиск максимума. Бусинка 1 опускается, бусинка 2 отъезжает от вершины угла. В начале обе покоятся. В конце стержень ложится на горизонтальную сторону: скорость бусинки 1 вертикальна, то есть перпендикулярна стержню, её проекция на стержень равна нулю — значит, и бусинка 2 стоит. Скорость бусинки 2 сначала растёт, потом падает, где-то между — максимум. Энергия даёт одно уравнение на две скорости, второе даёт жёсткость стержня; получив $V_2(\varphi)$, ищем максимум.

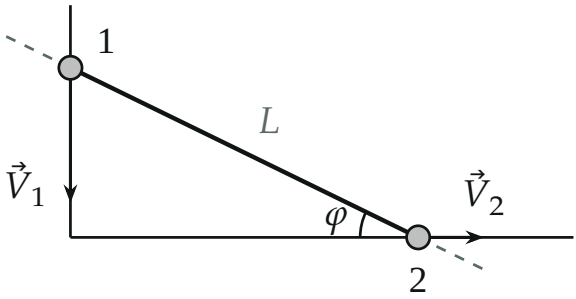
Обозначения. m — масса бусинки; φ — текущий угол стержня с горизонталью (в начале $\varphi = \alpha$, в конце $\varphi = 0$); V_1 — скорость бусинки 1

(вниз), V_2 — бусинки 2 (вправо); высоты отсчитываем от горизонтальной стороны угла; $s = \sin\varphi$.

1. Связь скоростей: стержень жёсткий. Длина стержня не меняется, поэтому проекции скоростей его концов на направление стержня равны (рисунок 2). Скорость $\vec{V}_1$ вертикальна и составляет со стержнем угол $90^\circ - \varphi$, скорость $\vec{V}_2$ горизонтальна и составляет со стержнем угол φ:

$$V_1 \cos(90^\circ - \varphi) = V_2 \cos\varphi \quad \Rightarrow \quad V_1 = V_2 \operatorname{ctg}\varphi.$$

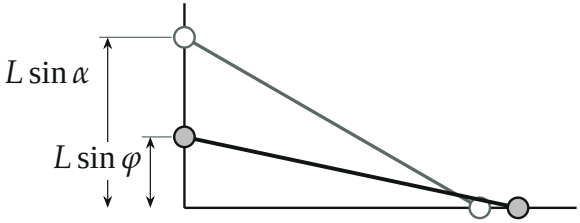
То же даёт дифференцирование координат: $y_1 = L\sin\varphi$, $x_2 = L\cos\varphi$, поэтому $V_1 = L\cos\varphi\,|\dot{\varphi}|$, $V_2 = L\sin\varphi\,|\dot{\varphi}|$.



Скорости бусинок в промежуточном положении и продолжения стержня (пунктир): проекции $\vec{V}_1$ и $\vec{V}_2$ на стержень равны.

2. Закон сохранения энергии системы бусинки + стержень. Трения нет, проволока действует на каждую бусинку перпендикулярно её скорости и работы не совершает; стержень невесом, его силы на две бусинки работы в сумме не совершают. Работает только сила тяжести, а высота меняется только у бусинки 1 (бусинка 2 всё время на высоте 0), рисунок 3:

$$mgL\sin\alpha = \frac{mV_1^2}{2} + \frac{mV_2^2}{2} + mgL\sin\varphi \quad \Rightarrow \quad V_1^2 + V_2^2 = 2gL(\sin\alpha - \sin\varphi).$$



Начальное положение (серое) и промежуточное: бусинка 1 опустилась с высоты $L\sin\alpha$ на $L\sin\varphi$.

3. Скорость бусинки 2 как функция угла. Подставим $V_1 = V_2\operatorname{ctg}\varphi$ из шага 1 в шаг 2: $V_2^2(1+\operatorname{ctg}^2\varphi) = V_2^2/\sin^2\varphi$, поэтому

$$V_2^2 = 2gL\,\sin^2\varphi\,(\sin\alpha - \sin\varphi) = 2gL\,s^2(\sin\alpha - s).$$

На концах отрезка $\varphi\in[0;\alpha]$ скорость V_2 равна нулю: при $\varphi=\alpha$ система ещё не разогналась, при $\varphi=0$ множитель $s^2=0$ (стержень горизонтален, вся энергия у бусинки 1).

4. Максимум скорости: производная равна нулю. V_2 растёт вместе с $f(s) = s^2(\sin\alpha - s)$, поэтому ищем максимум f:

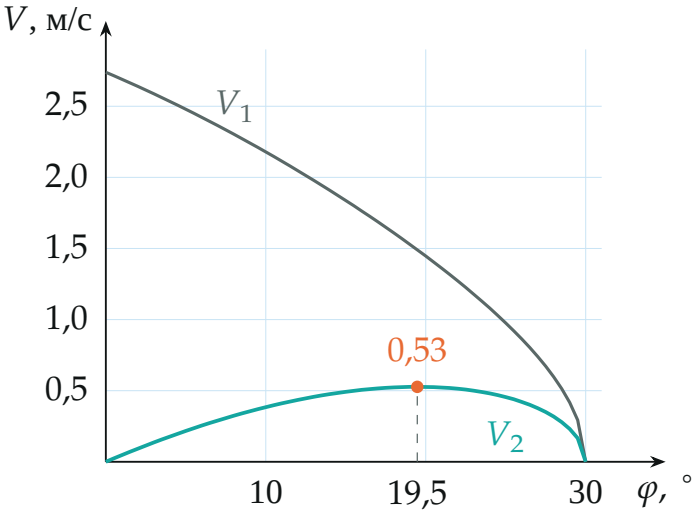
$$f'(s) = 2s\sin\alpha - 3s^2 = s(2\sin\alpha - 3s) = 0,$$

$$s_* = \frac{2\sin\alpha}{3} = \frac{1}{3}, \qquad \varphi_* \approx 19{,}5^\circ.$$

При $s < s_*$ производная положительна, при $s > s_*$ — отрицательна, значит это максимум (рисунок 4). Подставляем, учитывая $\sin\alpha - s_* = s_*/2$:

$$V^2 = 2gL\,s_*^2\cdot\frac{s_*}{2} = gL\Big(\frac{2\sin\alpha}{3}\Big)^3,$$

$$V = \sqrt{gL}\Big(\frac{2\sin\alpha}{3}\Big)^{3/2}, \qquad V = \sqrt{7{,}5}\cdot\Big(\frac{1}{3}\Big)^{3/2}\ \text{м/с} \approx 0{,}53\ \text{м/с}.$$



Скорости бусинок в зависимости от угла φ (по вычисленным точкам; движение идёт справа налево — от 30° к 0): V_2 максимальна при $\sin\varphi = 1/3$.

Обратите внимание. Максимум V_2 достигается не в конце движения: после φ_* стержень тормозит бусинку 2 и отдаёт её энергию бусинке 1. Стержень при этом из сжатого становится растянутым — проволока держит бусинки, поэтому они не отрываются, и решение верно до самого $\varphi = 0$.

Ответ: $V = \sqrt{gL}\left(\dfrac{2\sin\alpha}{3}\right)^{3/2} \approx 0{,}53$ м/с.

Проверка. Размерность: $\sqrt{gL}$ — м/с. Энергия в точке максимума: $V_1 = V_2 \operatorname{ctg}\varphi_* = \sqrt{8}\,V$, $V_1^2 + V_2^2 = 9V^2 \approx 2{,}50$ м^2/с^2, и $2gL(\sin\alpha - s_*) = 15 \cdot \frac{1}{6} = 2{,}50$ м^2/с^2 — сходится. Предел $\alpha \to 0$: бусинке 1 некуда опускаться, $V \to 0$ — верно.

Ответ. $V = \sqrt{gL}\left(\dfrac{2\sin\alpha}{3}\right)^{3/2} \approx 0{,}53$ м/с.