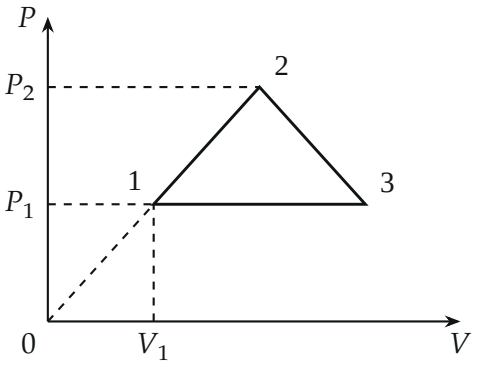
Цикл в виде равнобедренного треугольника

Задача 3. [Курчатов 2019/20, 11 класс, задача 3] Одноатомный идеальный газ работает по циклу $1-2-3-1$, имеющему вид равнобедренного треугольника на диаграмме $P-V$. Известно, что процесс $1-2$ лежит на прямой, проходящей через начало координат. Отношение максимального давления в цикле к минимальному $P_2/P_1 = 2$. Найдите работу, совершаемую газом за один цикл, считая известными давление и объём в точке 1. Найдите КПД тепловой машины, работающей по указанному циклу.



▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на первое начало термодинамики и КПД цикла. Работа за цикл — площадь треугольника. Для КПД нужна *подведённая* теплота, а на наклонном участке $2-3$ газ сначала получает тепло, потом отдаёт: подводится оно только до точки, где прямая $2-3$ касается адиабаты. Эту точку найдём из условия максимума подведённой теплоты.

Обозначения. ν — количество газа; $U = \frac{3}{2}\nu RT = \frac{3}{2}PV$ — его внутренняя энергия; A — работа газа за цикл; Q_+ — теплота, полученная газом за цикл; x — точка на $2-3$, где подвод тепла сменяется отводом; $k = P_1/V_1$ — модуль наклона сторон.

1. Вершины треугольника. Оси P и V имеют разные размерности, поэтому «равнобедренность» на диаграмме означает только равенство боковых сторон $1-2$ и $2-3$ (основание $1-3$ — горизонтальное, на

нём P_1 — минимальное давление). Прямая $1-2$ проходит через начало координат, поэтому $P \propto V$ на ней:

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{P_2}{P_1} = 2 \quad \Rightarrow \quad V_2 = 2V_1.$$

Вершина 2 лежит над серединой основания: $V_3 - V_2 = V_2 - V_1$, откуда $V_3 = 3V_1$, $P_3 = P_1$. Наклоны сторон равны по модулю: $P_1/V_1 = k$, и на стороне $2-3$

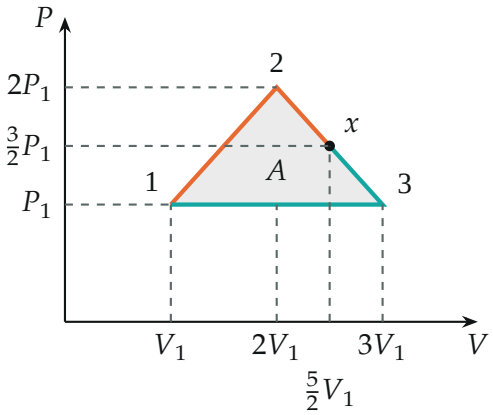
$$P = P_2 - k(V - V_2) = k(4V_1 - V).$$

2. Работа за цикл: площадь цикла на диаграмме $P-V$.

$$A = \frac{(P_2 - P_1)(V_3 - V_1)}{2} = \frac{P_1 \cdot 2V_1}{2} = P_1V_1.$$

3. Где газ получает тепло: первое начало термодинамики. $\delta Q = dU + P\,dV$ (рисунок 2):

- $1{-}2$: и объём, и температура ($T \propto PV$) растут — тепло подводится всё время;
- $3-1$: изобарное сжатие, температура падает — тепло отводится;
- $2-3$: объём растёт (работа положительна), но PV сначала растёт, потом падает — знак теплоты меняется, нужен расчёт.



Цикл с найденными координатами: красный участок $1-2-x$ — газ получает тепло, бирюзовый $x-3-1$ — отдаёт; серая площадь — работа A.

4. Теплота на $1-2$: первое начало термодинамики. Изменение внутренней энергии и работа (площадь трапеции под отрезком):

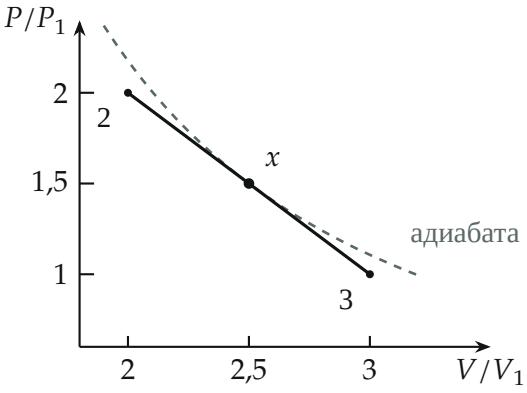
$$Q_{12} = \frac{3}{2}(P_2V_2 - P_1V_1) + \frac{(P_1+P_2)(V_2-V_1)}{2} = \frac{3}{2}\cdot 3P_1V_1 + \frac{3}{2}P_1V_1 = 6P_1V_1.$$

Второй способ: в процессе $P \propto V$ молярная теплоёмкость одноатомного газа $C = \frac{3}{2}R + \frac{1}{2}R = 2R$, и $Q_{12} = 2\nu R(T_2 - T_1) = 2(4-1)P_1V_1 = 6P_1V_1$.

5. Теплота на $2-3$: где она меняет знак. На малом участке dV при $P = k(4V_1 - V)$, $dP = -k\,dV$:

$$\delta Q = \frac{3}{2}(P\,dV + V\,dP) + P\,dV = \frac{5}{2}P\,dV + \frac{3}{2}V\,dP = k(10V_1 - 4V)dV.$$

Тепло подводится ($\delta Q > 0$), пока $V < \frac{5}{2}V_1$, и отводится после. Точка x: $V_x = \frac{5}{2}V_1$, $P_x = \frac{3}{2}P_1$. В ней прямая $2-3$ касается адиабаты (рисунок 3): наклон адиабаты $\frac{dP}{dV} = -\frac{5}{3}\cdot\frac{P_x}{V_x} = -\frac{5}{3}\cdot\frac{3/2}{5/2}\cdot\frac{P_1}{V_1} = -k$ — тот же, что у прямой.

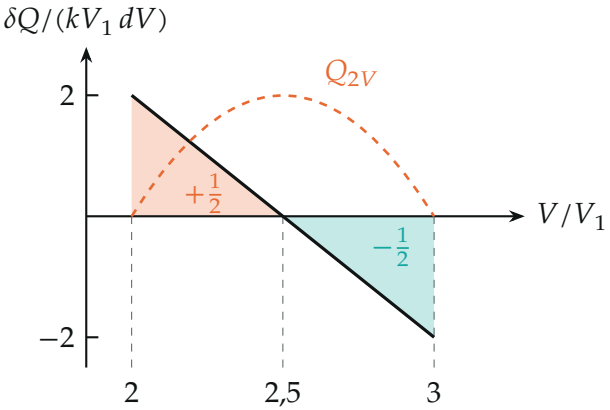


Прямая $2-3$ и адиабата $PV^{5/3} = \text{const}$ через точку x (пунктир, по вычисленным точкам): прямая касается её в x. Левее x газ, двигаясь вправо, переходит на всё более высокие адиабаты — получает тепло, правее — на более низкие, отдаёт.

6. Подведённая теплота на $2-x$. Сложим δQ от $2V_1$ до $\frac{5}{2}V_1$ (площадь под графиком $\delta Q/dV$ — треугольник, рисунок 4):

$$Q_{2x} = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{5}{2}V_1 - 2V_1\right)\cdot k(10V_1 - 8V_1) = \frac{1}{2}\cdot\frac{V_1}{2}\cdot 2kV_1 = \frac{1}{2}P_1V_1.$$

То же даёт метод организаторов: теплота от 2 до произвольной точки V стороны $2-3$ равна $Q_{2V} = k(V-2V_1)(6V_1-2V)$ — парабола с корнями $2V_1$ и $3V_1$, максимум в середине $V = \frac{5}{2}V_1$ равен $\frac{1}{2}P_1V_1$.



На стороне $2-3$: $\delta Q/dV$ (сплошная) меняет знак в $V = \frac{5}{2}V_1$; площадь красного треугольника — $Q_{2x} = \frac{1}{2}P_1V_1$. Пунктир — накопленная теплота Q_{2V} (в масштабе ×4), её максимум в той же точке.

7. КПД.

$$Q_+ = Q_{12} + Q_{2x} = 6P_1V_1 + \frac{1}{2}P_1V_1 = \frac{13}{2}P_1V_1,$$

$$\eta = \frac{A}{Q_+} = \frac{P_1V_1}{\frac{13}{2}P_1V_1} = \frac{2}{13} \approx 15{,}4\%.$$

Обратите внимание. Если считать подведённой всю теплоту участков $1-2$ и $2-3$ целиком, то получится $Q = 6P_1V_1 + 0 = 6P_1V_1$ (на $2-3$ полученное и отданное тепло равны, $Q_{23} = Q_{2V}(3V_1) = 0$) и $\eta = 1/6$

— неверно: КПД считают по теплоте, *полученной* от нагревателя, а она включает $Q_{2x} > 0$.

Ответ: $A = \dfrac{(P_2 - P_1)(V_3 - V_1)}{2} = P_1V_1$; $\eta = \dfrac{A}{Q_{12} + Q_{2x}} = \dfrac{2}{13} \approx 15{,}4\%$.

Проверка. Баланс за цикл: получено $\frac{13}{2}P_1V_1$; отдано на $x-3$: $\frac{1}{2}P_1V_1$, на $3-1$ (изобара, $C_P = \frac{5}{2}R$): $\frac{5}{2}P_1(3V_1 - V_1) = 5P_1V_1$; разность $\frac{13}{2} - \frac{1}{2} - 5 = 1$ — равна работе $A = P_1V_1$. КПД цикла Карно между крайними температурами $T_{\max} \propto 4P_1V_1$ и $T_{\min} \propto P_1V_1$ равен 75% — наш КПД много меньше, как и должно быть.

Ответ. $A = P_1V_1$; $\eta = \dfrac{2}{13} \approx 15{,}4\%$.