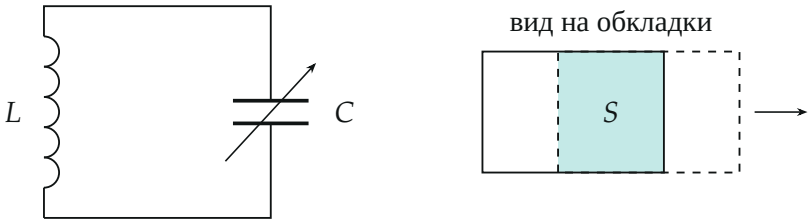
Радиоприёмник Штирлица

Задача 4. [Курчатов 2019/20, 11 класс, задача 4] Штирлиц получает секретные задания от радистки Кэт по обычному радиоприёмнику, настроенному на частоту 100 МГц. Радиоприёмник содержит в себе колебательный контур, резонансная частота которого соответствует частоте радиосигнала. Для того, чтобы ловить сигнал от разных радиостанций, в колебательном контуре меняют площадь перекрытия обкладок конденсатора S, тем самым меняя его ёмкость C, а индуктивность катушки L остаётся неизменной. Известно, что катушка индуктивности имеет $N = 100$ витков, радио ловит частоту 100 МГц при $S = 100$ см^2. В один момент из-за плохой изоляции в катушке замкнулись два соседних витка. На какое значение на шкале частот Штирлицу нужно будет настроить радиоприёмник, чтобы услышать сообщение радистки Кэт? Как при этом изменится значение S?



Поясняющий рисунок: колебательный контур приёмника и вид на обкладки конденсатора; бирюзой — площадь перекрытия S, вторую обкладку сдвигают ручкой настройки.

▲ **Решение.** **Что происходит.** Это задача-оценка на формулу Томсона. Контур откликается на ту частоту, при которой LC имеет нужное значение. После замыкания витков индуктивность уменьшилась, и чтобы снова поймать те же 100 МГц, ёмкость (значит, и площадь перекрытия) надо увеличить. А шкала приёмника размечена для старой катушки: каждому положению ручки (каждому S) на ней написана частота, которую ловила бы исправная катушка. Поэтому Штирлиц увидит на шкале другую цифру, хотя слушает ту же станцию.

Обозначения. $\nu_0 = 100$ МГц — частота Кэт; $N = 100$ — витков сначала, N' — работающих витков после замыкания; $S_0 = 100$ см^2 — площадь перекрытия до аварии, S' — после перенастройки; $\nu_{\text{шк}}$ — показание шкалы.

1. Зависимость частоты от N и S. Формула Томсона для колебательного контура:

$$\nu = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}.$$

Индуктивность длинной катушки $L = \mu_0 N^2 A/l$ (A — площадь витка, l — длина катушки) пропорциональна N^2: каждый виток и создаёт поле ($\propto N$), и сцеплён с ним ($\propto N$). Ёмкость плоского конденсатора $C = \varepsilon_0 S/d$ пропорциональна площади перекрытия. Значит,

$$\nu = \frac{\gamma}{N\sqrt{S}},$$

где γ — постоянная, в которую вошли размеры катушки и зазор конденсатора. Длина l после замыкания почти не меняется (из 100 витков выпал один), поэтому γ та же.

2. Сколько витков осталось. Замыкание двух соседних витков — это перемычка между концом одного витка и концом соседнего (рисунок 2). Ток идёт по перемычке, минуя один виток, так что работают

$$N' = N - 1 = 99 \text{ витков}.$$



Замкнулись соседние витки: ток идёт по перемычке и обходит один виток (бирюзовый), работают $N - 1$ витков.

3. Новая площадь перекрытия. Станция та же, ν_0 не изменилась. Приравняем частоты до и после (шаг 1):

$$\frac{\gamma}{N\sqrt{S_0}} = \frac{\gamma}{N'\sqrt{S'}} \quad \Rightarrow \quad S' = S_0\Big(\frac{N}{N'}\Big)^2 = 100 \cdot \Big(\frac{100}{99}\Big)^2 \approx 102{,}0 \text{ см}^2.$$

Площадь увеличилась на

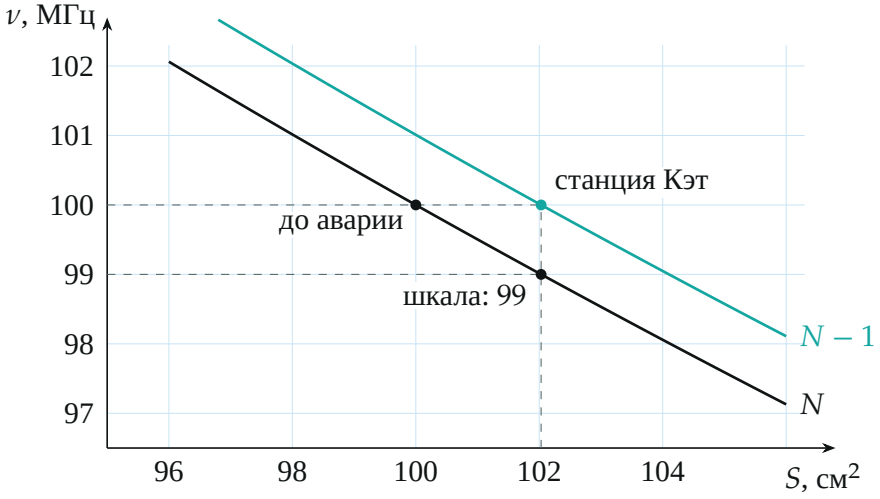
$$\Delta S = S' - S_0 = S_0\,\frac{N^2 - N'^2}{N'^2} = S_0\,\frac{2N-1}{(N-1)^2} \approx \frac{2S_0}{N} \approx 2 \text{ см}^2.$$

Знак плюс: витков стало меньше, L уменьшилась в $(N/N')^2$ раз, и ёмкость нужно увеличить во столько же раз, чтобы LC осталось прежним.

4. Что покажет шкала. Шкала показывает частоту, которую ловил бы контур со старой катушкой (N витков) при данном S. При S' это

$$\nu_{\text{шк}} = \frac{\gamma}{N\sqrt{S'}} = \nu_0\sqrt{\frac{S_0}{S'}} = \nu_0\,\frac{N'}{N} = 100 \cdot \frac{99}{100} = 99 \text{ МГц}.$$

На рисунке 3 это видно по двум кривым $\nu(S)$: исправная катушка (по ней размечена шкала) и катушка с 99 витками. Чтобы новая кривая дала 100 МГц, нужно $S' \approx 102$ см^2; при этом S' старая кривая — то есть шкала — показывает 99 МГц.

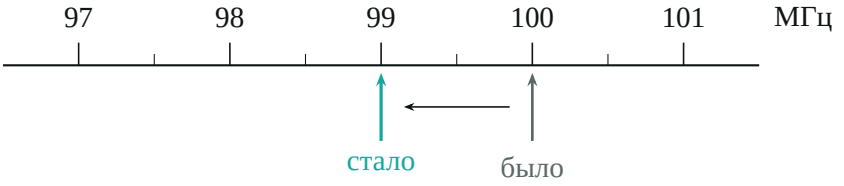


Частота настройки в зависимости от площади перекрытия: чёрная кривая — исправная катушка (по ней размечена шкала), бирюзовая — после замыкания. Кривые посчитаны по $\nu = \gamma/(N\sqrt{S})$.

5. Второй способ — через относительные изменения. Логарифмируем $\nu = \gamma/(N\sqrt{S})$ и берём малые изменения:

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = -\frac{\Delta N}{N} - \frac{1}{2}\frac{\Delta S}{S}.$$

Частота Кэт не изменилась, $\Delta\nu = 0$, $\Delta N = -1$: $\dfrac{\Delta S}{S} = \dfrac{2}{N} = 2\,\%$, то есть $\Delta S \approx 2\,\text{см}^2$. Шкала при неизменном N сдвигается на $\dfrac{\Delta\nu_{\text{шк}}}{\nu} = -\dfrac{1}{2}\cdot 2\,\% = -1\,\%$, то есть на -1 МГц. Совпало с шагами 3–4.



Шкала приёмника: стрелку надо перевести со 100 *на* 99 *МГц, ручка при этом увеличивает перекрытие обкладок на* 2 *см*^{2}.

Обратите внимание. Частота сигнала не изменилась — изменилась катушка. Цифра 99 МГц на шкале не значит, что Кэт стала передавать на другой частоте: шкала просто перестала соответствовать контуру.

Ответ: шкалу надо поставить на

$$\nu_{\text{шк}} = \nu_0 \frac{N-1}{N} = 99 \text{ МГц},$$

площадь перекрытия при этом увеличивается:

$$S' = S_0\Big(\frac{N}{N-1}\Big)^2 \approx 102 \text{ см}^2, \qquad \Delta S \approx \frac{2S_0}{N} = 2 \text{ см}^2.$$

Проверка. Размерность: ΔS — в см^2, как S_0; отношение N'/N безразмерно. Предел: при $N \to \infty$ потеря одного витка ничего не меняет, $\Delta S \to 0$ и $\nu_{\text{шк}} \to \nu_0$. Второй способ (шаг 5) даёт те же 2 см^2 и 99 МГц.

Ответ. Настроить на $\nu = 100 \cdot \dfrac{N-1}{N} = 99$ МГц по шкале; площадь перекрытия увеличится примерно на 2 см^2 (до ≈ 102 см^2).