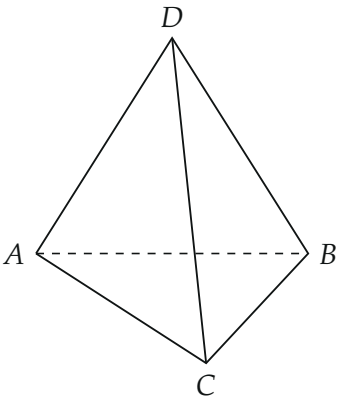
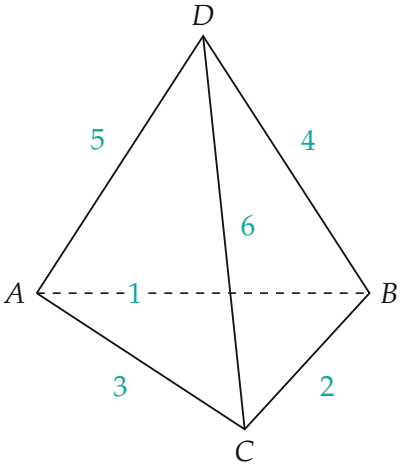
Тетраэдр из резисторов и источников

Задача 5. [Курчатов 2019/20, 11 класс, задача 5] В тетраэдре $ABCD$ каждое ребро представляет собой последовательно соединённые резистор и ЭДС с произвольными значениями R_i и $\mathcal{E}_i$ соответственно, где i — номер ребра, например, 1 для ребра AB, 2 — для ребра BC и т. д. В ребро AB последовательно подсоединили ключ K, а в ребро CD — идеальный амперметр. При каких условиях на R_i для любых значений $\mathcal{E}_i$ замыкание и размыкание ключа K не приведут к изменениям показаний амперметра?



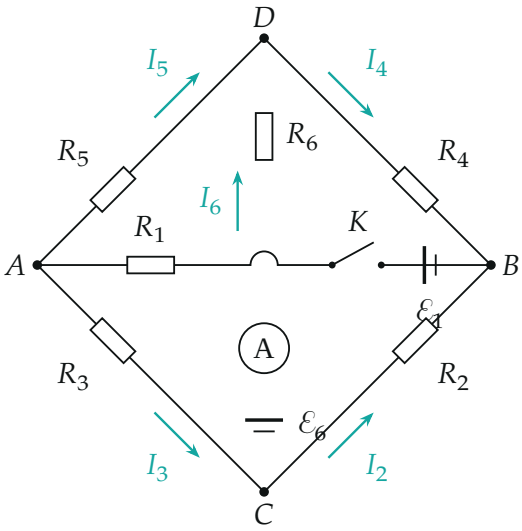
▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на линейные цепи постоянного тока: правила Кирхгофа и принцип наложения. Ключ меняет только ток ребра AB. Изменения остальных токов вызваны одним этим изменением, и они не зависят от ЭДС (все ЭДС, кроме ребра AB, при переключении остаются на месте и «сокращаются» в разности). Амперметр не почувствует ключа, если ребро CD — диагональ уравновешенного моста, у которого ребро AB служит питающей диагональю.

Обозначения. Рёбра: 1 — AB, 2 — BC, 3 — AC, 4 — BD, 5 — AD, 6 — CD (как у организаторов). Положительные направления токов (рисунок 2): I_3 от A к C, I_2 от C к B, I_5 от A к D, I_4 от D к B, I_6 от C к D. Штрих — токи при разомкнутом ключе; $\delta I_i = I_i' - I_i$.



Номера рёбер тетраэдра: 1 — *AB (с ключом),* 6 — *CD (с амперметром).*

1. Тетраэдр как мост. Расплющим тетраэдр на плоскость: вершины *A* и *B* — слева и справа, *D* и *C* — сверху и снизу. Ребро *AB* с ключом становится горизонтальной диагональю, ребро *CD* с амперметром — вертикальной. Получился мост Уитстона.



Тетраэдр, развёрнутый в мост: ребро AB (ключ K) и ребро CD (амперметр)

— диагонали; бирюзой — выбранные положительные направления токов. ЭДС рёбер 2–5 на схеме не показаны, но они есть.

2. Чем отличаются два состояния. Пусть I_i — токи при замкнутом ключе, I_i' — при разомкнутом. В обоих состояниях в рёбрах 2–6 одни и те же резисторы и ЭДС. Запишем для обоих состояний правила Кирхгофа, не трогающие ребро AB, и вычтем одно из другого.

Первое правило Кирхгофа (сохранение заряда) для узлов C и D:

$$I_3 = I_2 + I_6, \qquad I_5 + I_6 = I_4 \;\Rightarrow\; \delta I_3 = \delta I_2 + \delta I_6, \quad \delta I_5 + \delta I_6 = \delta I_4.$$

Второе правило Кирхгофа для контура $A \to C \to D \to A$ и для контура $C \to B \to D \to C$:

$$R_3 I_3 + R_6 I_6 - R_5 I_5 = \mathcal{E}_{ACD}, \qquad R_2 I_2 - R_4 I_4 - R_6 I_6 = \mathcal{E}_{CBD},$$

где справа — алгебраические суммы ЭДС этих контуров, одинаковые в обоих состояниях. После вычитания ЭДС пропадают:

$$R_3\,\delta I_3 + R_6\,\delta I_6 - R_5\,\delta I_5 = 0, \qquad R_2\,\delta I_2 - R_4\,\delta I_4 - R_6\,\delta I_6 = 0.$$

Значит, приращения токов δI_i — это токи той же цепи без ЭДС в рёбрах 2–6, и от $\mathcal{E}_2, \dots, \mathcal{E}_6$ они не зависят.

3. Амперметр не меняет показаний: $\delta I_6 = 0$**.** Подставим:

$$\delta I_3 = \delta I_2 \equiv x, \qquad \delta I_5 = \delta I_4 \equiv y, \qquad R_3\,x = R_5\,y, \qquad R_2\,x = R_4\,y.$$

Ток, ушедший из ребра AB, идёт теперь в обход — по путям $A \to C \to B$ (это x) и $A \to D \to B$ (это y); по первому правилу Кирхгофа для узла A его изменение равно $x + y$. При произвольных ЭДС ток ребра AB при замкнутом ключе не ноль, поэтому x и y не равны нулю одновременно. Однородная система из двух уравнений имеет ненулевое решение, только если её определитель равен нулю:

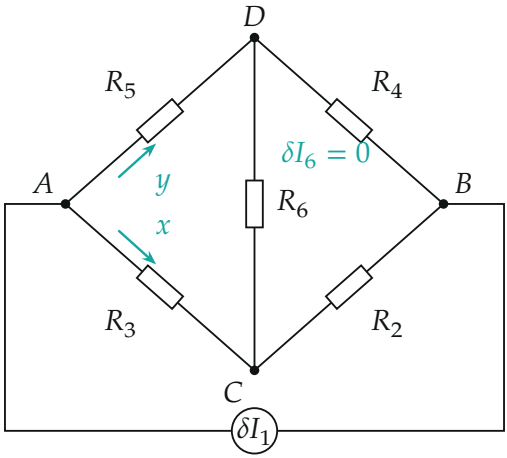
$$R_3 R_4 - R_5 R_2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{R_5}{R_3} = \frac{R_4}{R_2}.$$

Это необходимое условие.

4. Условие и достаточно: уравновешенный мост. По шагу 2 приращения токов — это токи цепи, в которой все ЭДС рёбер 2–6 убраны, а в ребре AB действует только скачок тока. Такая цепь — мост, питаемый по диагонали AB (рисунок 3). Делители $A-C-B$ и $A-D-B$ при токе x и y дают

$$\varphi_A - \varphi_C = R_3 x, \qquad \varphi_A - \varphi_D = R_5 y.$$

При $R_3/R_2 = R_5/R_4$ точки C и D делят напряжение U_{AB} в одинаковом отношении, $\varphi_C = \varphi_D$, и ток по ребру CD не идёт: $\delta I_6 = 0$ при любых ЭДС.



Цепь для приращений токов: ЭДС рёбер 2–6 убраны, в ребре AB — только изменение тока δI_1 (кружок — источник этого тока). При $R_3R_4 = R_2R_5$ мост уравновешен, $\varphi_C = \varphi_D$.

5. Вырожденный случай. Если $R_1 = \infty$ (ребро AB оборвано), ток $I_1 = 0$ и при замкнутом ключе — переключать нечего, показания не меняются при любых остальных R_i.

6. Проверка численно. Посчитаем цепь методом узловых потенциалов (python) при случайных R_i (от 1 до 5 Ом) и $\mathcal{E}_i$ (от −3 до 3 В): без условия ток амперметра при замкнутом и разомкнутом ключе разный (0,0050 А и 0,0012 А), а если подобрать $R_5 = R_3R_4/R_2$ — оба раза 0,7717 А. Условие работает.

Обратите внимание. Условие не содержит ни R_1, ни R_6: сопротивление амперметрового ребра и ребра с ключом на равновесие моста не влияют. Индексы в ответе завязаны на нумерацию рёбер: $R_5/R_3 = R_4/R_2$ — это $R_{AD}/R_{AC} = R_{BD}/R_{BC}$, то есть рёбра, сходящиеся в A, относятся так же, как рёбра, сходящиеся в B.

Ответ:

$$\frac{R_5}{R_3} = \frac{R_4}{R_2} \quad \left(\text{то есть } \frac{R_{AD}}{R_{AC}} = \frac{R_{BD}}{R_{BC}}\right),$$

R_1 и R_6 — любые; вырожденный случай — $R_1 = \infty$.

Проверка. Размерность: отношение сопротивлений безразмерно. Симметрия: условие не меняется при перестановке $A \leftrightarrow B$ (меняются местами $3 \leftrightarrow 2$ и $5 \leftrightarrow 4$) и при $C \leftrightarrow D$ ($3 \leftrightarrow 5$, $2 \leftrightarrow 4$), как и должно быть. Предельный случай: все сопротивления равны — мост симметричен, условие выполнено.

Ответ. $\dfrac{R_5}{R_3} = \dfrac{R_4}{R_2}$, то есть $R_{AD}R_{BC} = R_{AC}R_{BD}$ (при любых R_1, R_6); тривиальный случай — $R_1 = \infty$.