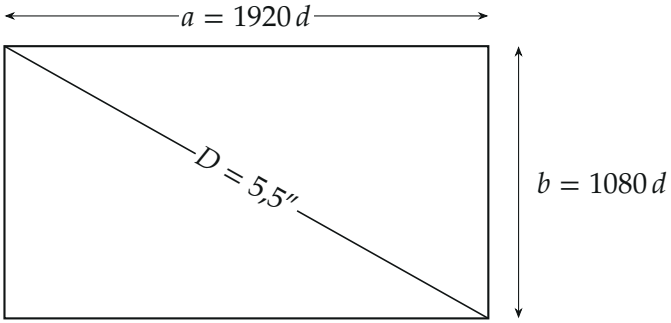
Экран телефона как дифракционная решётка

Задача 6. [Курчатов 2019/20, 11 класс, задача 6] Экран современного мобильного телефона может служить отражательной дифракционной решёткой. Если посмотреть на изображение удалённого точечного источника света, отражённое от выключенного экрана телефона, можно увидеть дифракционную картину (попробуйте провести данный опыт по окончании олимпиады). Возьмём технические характеристики одной популярной модели: диагональ экрана $D = 5{,}5$ дюймов, разрешение 1920 на 1080 пикселей. Определите период дифракционной решётки, соответствующей данному экрану, считая, что пиксели имеют квадратную форму. Определите угловое расстояние между максимумами первого порядка для красного света (длина волны $\lambda_1 = 650$ нм) и синего ($\lambda_2 = 450$ нм). Угол отсчитывается от нормали к поверхности экрана.



Поясняющий рисунок: экран — прямоугольник из квадратных пикселей со стороной d, диагональ D.

▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на отражательную дифракционную решётку. Пиксели экрана повторяются с периодом d (размер одного квадратного пикселя), и свет, отражённый соседними пикселями, интерферирует: максимумы там, где разность хода соседних лучей равна целому числу длин волн. Красный свет длиннее синего, поэтому его максимум первого порядка дальше от направления зеркального отражения. Угловое расстояние между ними зависит от того, под каким углом падает свет, — его и нужно оценить в разумных пределах.

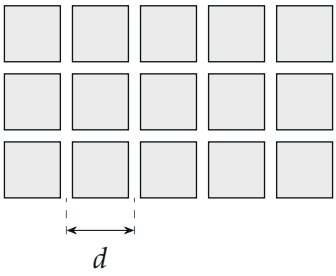
Обозначения. d — период решётки (сторона пикселя); a, b — ширина и высота экрана; θ — угол падения (от нормали); φ_1, φ_2 — углы максимумов первого порядка красного и синего; $\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$.

1. Период решётки: теорема Пифагора для экрана. Пиксели квадратные, поэтому $a = 1920\,d$, $b = 1080\,d$, $a : b = 16 : 9$. Диагональ $D = 5{,}5 \cdot 25{,}4$ мм $= 139{,}7$ мм:

$$D^2 = a^2 + b^2 = d^2(1920^2 + 1080^2) \quad \Rightarrow \quad d = \frac{D}{\sqrt{1920^2 + 1080^2}},$$

$$d = \frac{D}{120\sqrt{337}} \approx \frac{139{,}7\text{ мм}}{2203} \approx 0{,}063\text{ мм}.$$

Это 63 мкм — в 100 раз больше длины волны, поэтому углы дифракции малы (около 10^{-2} рад).

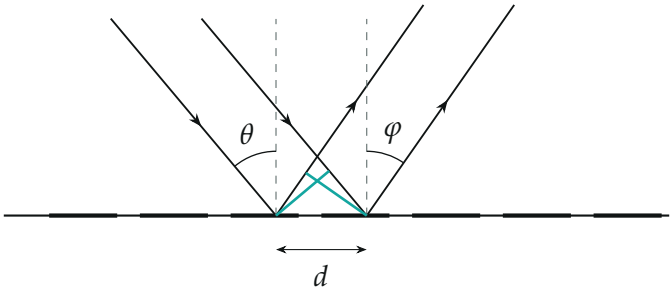


Пиксели экрана под лупой: картина повторяется с периодом d — это и есть период решётки.

2. Условие максимума: разность хода соседних лучей. Пусть параллельный пучок падает под углом θ, а наблюдаем отражённый свет под углом φ по ту же сторону нормали (рисунок 3). Луч, попавший в соседний пиксель, до экрана проходит на $d\sin\theta$ больше, а после экрана — на $d\sin\varphi$ меньше. Разность хода $d(\sin\varphi - \sin\theta)$; максимум первого порядка — когда она равна λ:

$$d\,(\sin\varphi_1 - \sin\theta) = \lambda_1, \qquad d\,(\sin\varphi_2 - \sin\theta) = \lambda_2.$$

При $\varphi = \theta$ разность хода ноль — это нулевой порядок, обычное зеркальное отражение.



Два луча, отражённые соседними пикселями: бирюзовые отрезки отсекают лишний путь $d\sin\theta$ до экрана и $d\sin\varphi$ после него.

3. Угловое расстояние: вычитаем условия. Вычтем уравнения шага 2:

$$d\,(\sin\varphi_1 - \sin\varphi_2) = \lambda_1 - \lambda_2.$$

Разность синусов — через произведение:

$$2d\,\sin\frac{\varphi_1-\varphi_2}{2}\,\cos\frac{\varphi_1+\varphi_2}{2} = \lambda_1 - \lambda_2.$$

Углы φ_1 и φ_2 отличаются от θ лишь на $\sim \lambda/d \sim 10^{-2}$ рад, поэтому $\frac{\varphi_1+\varphi_2}{2} \approx \theta$, а $\sin\frac{\Delta\varphi}{2} \approx \frac{\Delta\varphi}{2}$:

$$\Delta\varphi \approx \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{d\cos\theta}.$$

Знак плюс: красный максимум дальше от зеркального направления, чем синий.

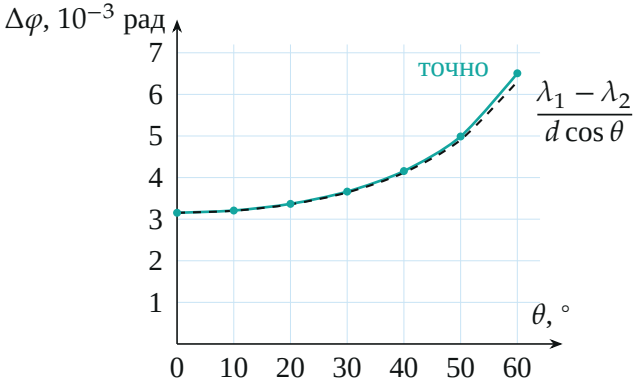
4. Числа. При нормальном падении ($\cos\theta = 1$):

$$\Delta\varphi_{\min} = \frac{200\cdot10^{-9}\text{ м}}{6{,}34\cdot10^{-5}\text{ м}} \approx 3{,}2\cdot10^{-3}\text{ рад} \approx 0{,}18^\circ.$$

Чем более скользящее падение, тем больше $\Delta\varphi$; при $\theta \to 90^\circ$ формула даёт бесконечность (но тогда и картину не разглядеть). Для удобного наблюдения возьмём $\cos\theta$ от 0,5 до 1 (угол падения до 60°):

$$3{,}2\cdot10^{-3}\text{ рад} \le \Delta\varphi \le 6{,}3\cdot10^{-3}\text{ рад}.$$

Точный расчёт по шагу 2 (через arcsin, python) даёт $3{,}15 \cdot 10^{-3}$ рад при $\theta = 0$ и $6{,}5 \cdot 10^{-3}$ рад при $\theta = 60°$ (рисунок 4): приближение шага 3 годится.



Угловое расстояние между красным и синим максимумами первого порядка в зависимости от угла падения: точки — точный расчёт через arcsin, *пунктир — формула шага 3.*

Обратите внимание. У организаторов в исходном тексте решения $d \approx 0{,}088$ мм и $\Delta\varphi$ от $3{,}4 \cdot 10^{-3}$ до $6{,}8 \cdot 10^{-3}$ рад; их же формула даёт $d \approx 0{,}063$ мм и $3{,}2$–$6{,}3 \cdot 10^{-3}$ рад (на сайте уже исправлено). Верхняя граница — оценка: она зависит от того, под каким углом смотрит наблюдатель.

Ответ:

$$d = \frac{D}{\sqrt{1920^2 + 1080^2}} \approx 0{,}063 \text{ мм}, \qquad \Delta\varphi \approx \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{d \cos\theta} \approx (3{,}2\text{–}6{,}3) \cdot 10^{-3} \text{ рад}.$$

Проверка. Размерность: λ/d — безразмерно, радианы. Предел: при $\lambda_1 = \lambda_2$ максимумы совпадают, $\Delta\varphi = 0$. Второй способ — точный расчёт через arcsin (рисунок 4) — отличается от приближённого меньше чем на 4 % при $\theta \leq 60°$.

Ответ. $d = \dfrac{D}{\sqrt{1920^2 + 1080^2}} \approx 0{,}063$ мм; $\Delta\varphi \approx \dfrac{\lambda_1 - \lambda_2}{d \cos\theta}$: $3{,}2 \cdot 10^{-3}$ рад при нормальном падении, до $\approx 6{,}3 \cdot 10^{-3}$ рад при $\theta = 60°$.