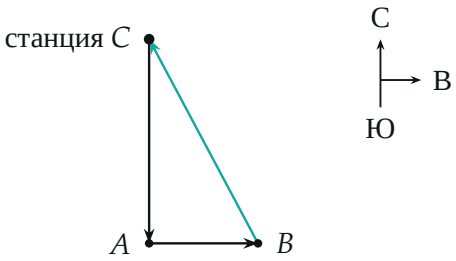
Прогулка Красной Шапочки

Задача 2. [Курчатов 2019/20, 7 класс, задача 2] Красная Шапочка опоздала на электричку к бабушке и теперь должна ждать следующую, которая прибудет через полчаса. Чтобы скоротать время, она решила прогуляться: в течение $t_1 = 15$ минут она шла строго на юг с постоянной скоростью, затем повернула на восток и шла ещё $t_2 = 8$ минут с этой же скоростью. Вспомнив о времени прибытия электрички, она побежала к станции по кратчайшему пути со скоростью в два раза большей, чем шла до этого момента. Успеет ли Красная Шапочка на электричку?



Поясняющий рисунок: путь на юг CA, на восток AB и бег к станции по прямой BC.

▲ **Решение.** **Что происходит.** Это задача на равномерное движение. Путь на юг и путь на восток перпендикулярны, а кратчайший путь назад — отрезок прямой. Получается прямоугольный треугольник, и длину обратного пути даёт теорема Пифагора. Неизвестную скорость знать не нужно: все отрезки пропорциональны ей и сократятся.

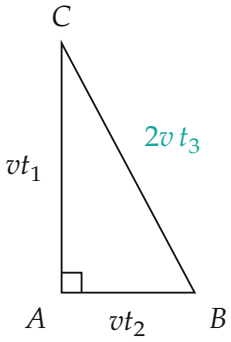
Обозначения. v — скорость шага; C — станция, A — точка поворота на восток, B — точка, откуда она побежала; t_3 — время бега; $t = t_1 + t_2 + t_3$ — полное время; $T = 30$ мин — время до электрички.

1. Длины катетов: путь при равномерном движении. $s = vt$ на каждом участке (рисунок 2):

$$CA = vt_1, \qquad AB = vt_2.$$

2. Длина обратного пути: теорема Пифагора для треугольника CAB. Угол при A прямой (юг и восток перпендикулярны):

$$BC^2 = CA^2 + AB^2 = v^2(t_1^2 + t_2^2).$$



Треугольник маршрута: катеты пройдены шагом, гипотенуза — бегом.

3. Время бега: путь при равномерном движении. Бежит она со скоростью $2v$, значит $BC = 2v\,t_3$. Приравниваем к шагу 2:

$$(2v\,t_3)^2 = v^2(t_1^2 + t_2^2) \quad \Rightarrow \quad t_3 = \frac{\sqrt{t_1^2 + t_2^2}}{2},$$

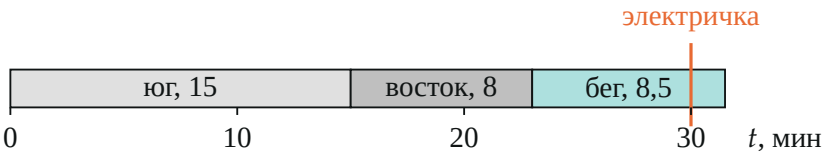
$$t_3 = \frac{\sqrt{15^2 + 8^2}}{2}\ \text{мин} = \frac{17}{2}\ \text{мин} = 8{,}5\ \text{мин}.$$

Скорость v сократилась, как и ожидалось.

4. Полное время прогулки.

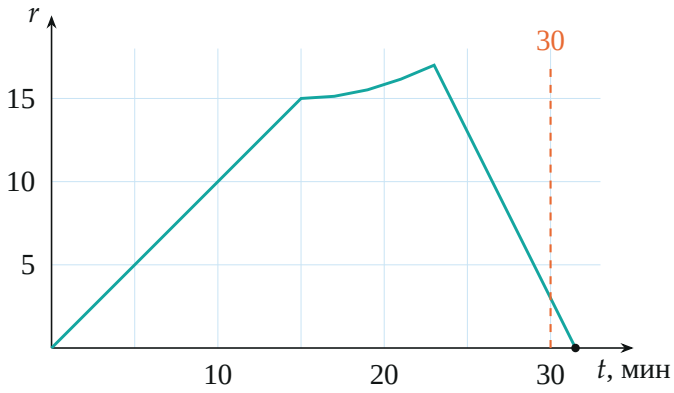
$$t = t_1 + t_2 + t_3 = 15 + 8 + 8{,}5 = 31{,}5\ \text{мин} > T = 30\ \text{мин}.$$

Красная Шапочка вернётся на полторы минуты позже электрички (рисунок 3).



Шкала времени: прогулка занимает 31,5 мин, электричка приходит через 30 мин.

5. Расстояние до станции по времени. Посмотрим, как менялось расстояние r от станции (рисунок 4; r в единицах «сколько проходишь шагом за минуту»): до t_1 оно растёт линейно до 15, затем по теореме Пифагора $r = \sqrt{15^2 + (t-15)^2}$ доходит до 17 к 23-й минуте, потом при беге убывает на 2 в минуту и обращается в ноль только при $t = 31{,}5$ мин.



Расстояние до станции $r(t)$ по вычисленным точкам: к 30-й минуте ($r = 3$) она ещё в пути.

Ответ: $t = t_1 + t_2 + \dfrac{\sqrt{t_1^2 + t_2^2}}{2} = 31{,}5$ мин > 30 мин — не успеет.

Проверка. Размерность: все слагаемые — минуты. Предел: если бы она шла только на юг ($t_2 = 0$), бег назад занял бы $t_1/2$ — вдвое быстрее шага, верно. Отставание 1,5 мин при беге со скоростью $2v$ — это $3v \cdot 1$ мин, как и показывает график в момент $t = 30$ мин.

Ответ. Не успеет: на прогулку уйдёт $t = 31{,}5$ мин > 30 мин.