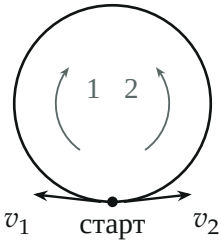
Два бегуна на круговой трассе

Задача 4. [Курчатов 2019/20, 7 класс, задача 4] Два бегуна стартуют из одной точки круговой трассы в разных направлениях. Скорость первого бегуна равна 15 км/ч, второго — на 1 км/ч больше. Через определённый момент времени они одновременно оказались в точке старта, причём первый бегун на этот момент пробежал на 2 круга меньше второго. Сколько именно кругов пробежал первый бегун?



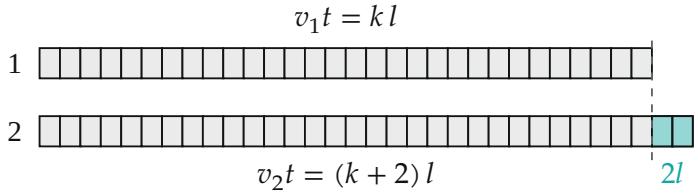
Поясняющий рисунок: бегуны 1 и 2 стартуют из одной точки в разные стороны.

▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на равномерное движение по окружности. Бегун снова в точке старта, только если пробежал целое число кругов. Оба бегуна бежали одно и то же время, поэтому их пути относятся как скорости. Направление бега на путь не влияет: «на 2 круга больше» — это разность путей, $2l$.

Обозначения. $v_1 = 15$ км/ч, $v_2 = 16$ км/ч — скорости; l — длина круга; t — время от старта до момента, о котором говорится в условии; k — число кругов первого бегуна, $k + 2$ — второго.

1. Путь каждого бегуна: путь при равномерном движении. Модуль скорости постоянен, путь равен vt (рисунок 2):

$$v_1 t = k\,l, \qquad v_2 t = (k+2)\,l.$$



Пути бегунов, разложенные в линию: каждая клетка — один круг l; лишние у второго два круга — бирюзовые.

2. Время: вычитаем уравнения. Вычтем из второго уравнения первое — число кругов k уйдёт:

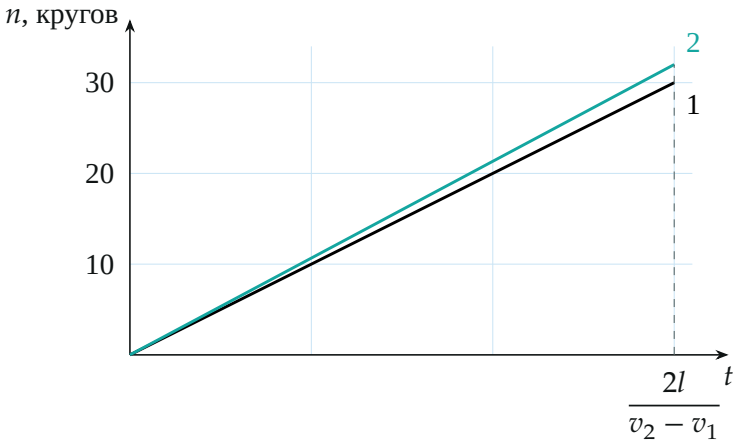
$$(v_2 - v_1)\,t = 2l \quad \Rightarrow \quad t = \frac{2l}{v_2 - v_1}.$$

Смысл: за время t второй бегун набирает лишние два круга, а лишняя скорость у него $v_2 - v_1 = 1$ км/ч.

3. Число кругов первого бегуна. Подставим t в первое уравнение:

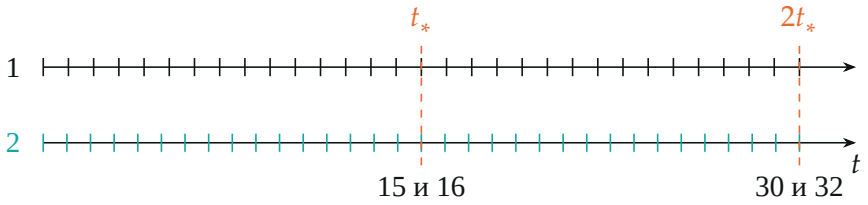
$$k = \frac{v_1 t}{l} = \frac{2v_1}{v_2 - v_1} = \frac{2 \cdot 15}{16 - 15} = 30.$$

Длина круга l сократилась — её знать не нужно. Второй бегун пробежал $k + 2 = 32$ круга, и правда $\dfrac{32}{30} = \dfrac{16}{15} = \dfrac{v_2}{v_1}$.



Число пройденных кругов $n = vt/l$: линии расходятся на 2 круга к моменту $t = \frac{2l}{v_2 - v_1}$, когда у первого ровно 30, у второго 32.

Обратите внимание. Не нужно складывать скорости, как при встречном движении: здесь спрашивают не о встречах бегунов, а о путях каждого, и пути от направления не зависят. Если бы требовалось первое такое возвращение обоих в старт, ответ был бы тем же (рисунок 4): оба окажутся в старте одновременно впервые через время, за которое первый пробежит 15 кругов, а второй 16 (разность 1 круг) — поэтому «разность в 2 круга» случается при $k = 30$, во второй раз.



Моменты, когда бегун в точке старта (штрихи): у первого — через l/v_1, у второго — через l/v_2. Вместе они в старте при $t_* = l/(1\ км/ч)$ (кругов 15 и 16) и $2t_*$ (30 и 32).

Ответ: $k = \dfrac{2v_1}{v_2 - v_1} = 30$ кругов.

Проверка. Размерность: k — отношение скоростей, безразмерно. Предел: чем ближе скорости, тем больше кругов надо пробежать, чтобы разница стала 2 круга, — при $v_2 - v_1 \to 0$ имеем $k \to \infty$, верно. Числа: $15t = 30l$ и $16t = 32l$ дают одно и то же $t = 2l$ (в часах при l в км).

Ответ. 30 кругов.