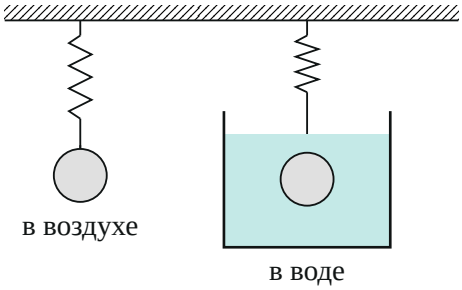
Плотность груши по динамометру

Задача 5. [Курчатов 2019/20, 7 класс, задача 5] Вова хочет найти плотность сорванной им неспелой груши, но под рукой у него имеются лишь таз с водой и динамометр. Взвесив грушу при помощи динамометра в воздухе, Вова установил растяжение пружины — 1,2 сантиметра. При погружении груши целиком в таз с водой растяжение пружины динамометра оказалось в 4 раза меньше. Найдите плотность груши. Ускорение свободного падения можно считать равным 10 Н/кг, плотность воды — 1 г/см^3.



Поясняющий рисунок: груша на динамометре в воздухе и целиком в воде — пружина растянута меньше.

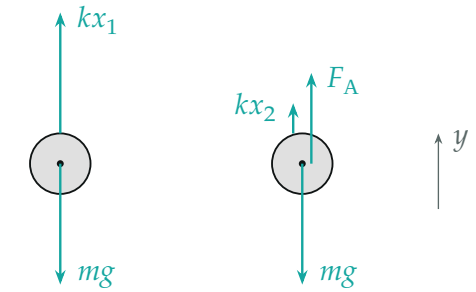
▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на закон Архимеда и закон Гука. В воздухе пружина держит весь вес груши. В воде часть веса берёт на себя выталкивающая сила, и пружина растягивается меньше. Разность растяжений измеряет силу Архимеда, а она пропорциональна объёму груши. Масса — из первого взвешивания, объём — из разности, плотность — их отношение. Жёсткость пружины неизвестна, но она сократится.

Обозначения. k — жёсткость пружины; $x_1 = 1{,}2$ см — растяжение в воздухе, $x_2 = x_1/4 = 0{,}3$ см — в воде; m, V, $\rho_{\text{гр}}$ — масса, объём и плотность груши; $\rho = 1$ г/см^3 — плотность воды. Ось y — вертикально вверх.

1. Взвешивание в воздухе: первый закон Ньютона для груши. На грушу действуют сила тяжести mg и сила упругости пружины kx_1 (закон

Гука), рисунок 2. Груша покоится, в проекции на y:

$$kx_1 - mg = 0 \quad \Rightarrow \quad m = \frac{kx_1}{g}.$$



в воздухе в воде

Силы на грушу: в воздухе пружина держит весь вес; в воде вес уравновешивают пружина и сила Архимеда (длины стрелок в масштабе 4 : 1 : 3).

2. Взвешивание в воде: первый закон Ньютона для груши. Теперь вверх тянут пружина и сила Архимеда $F_A = \rho g V$ (груша погружена целиком, рисунок 2 справа):

$$kx_2 + \rho g V - mg = 0.$$

Подставим $mg = kx_1$ из шага 1:

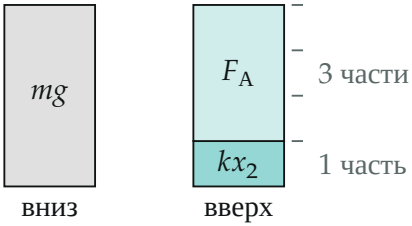
$$\rho g V = k(x_1 - x_2) \quad \Rightarrow \quad V = \frac{k(x_1 - x_2)}{\rho g}.$$

3. Плотность груши: определение плотности.

$$\rho_{\text{гр}} = \frac{m}{V} = \frac{kx_1}{g} \cdot \frac{\rho g}{k(x_1 - x_2)} = \rho \frac{x_1}{x_1 - x_2},$$

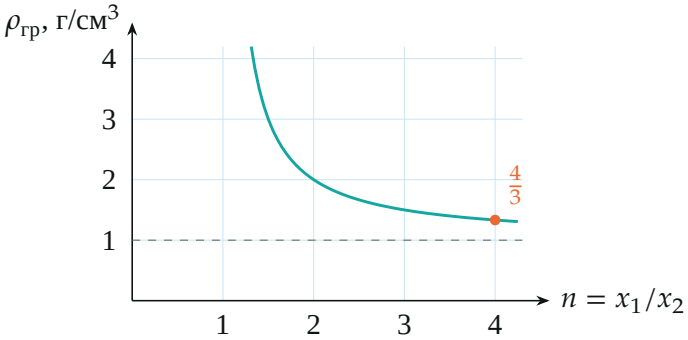
$$\rho_{\text{гр}} = 1 \text{ г/см}^3 \cdot \frac{1{,}2}{1{,}2 - 0{,}3} = \frac{4}{3} \text{ г/см}^3 \approx 1{,}33 \text{ г/см}^3.$$

Жёсткость k и ускорение g сократились. Плотность больше плотности воды — в воде груша тонет и тянет пружину вниз, как и было в опыте.



Баланс сил в воде в «частях» растяжения: вес — 4 части (x_1), пружина — 1 часть (x_2), сила Архимеда — остальные 3.

4. Тот же ответ «в частях». Вес груши — 4 части, сила Архимеда — 3 части (рисунок 3). Вес $= \rho_{\text{гр}} g V$, сила Архимеда $= \rho g V$, поэтому $\rho_{\text{гр}}/\rho = 4/3$.



Плотность груши $\rho_{гр} = \rho \dfrac{n}{n-1}$ в зависимости от того, во сколько раз n уменьшилось растяжение в воде (по вычисленным точкам); при $n \to \infty$ груша не тяжелее воды.

Обратите внимание. В воде растяжение не нулевое, значит груша тонет: будь она легче воды, она всплыла бы и пружина вообще не растянулась бы (или её пришлось бы топить, и пружина сжалась бы). Поэтому ответ обязан быть больше 1 г/см^3.

Ответ: $\rho_{\text{гр}} = \rho \dfrac{x_1}{x_1 - x_2} = \dfrac{4}{3}$ г/см^3 $\approx 1{,}33$ г/см^3.

Проверка. Размерность: $\rho\cdot$(отношение длин) — г/см^3. Предел: если в воде растяжение не изменилось бы ($x_2 \to x_1$), сила Архимеда была бы ничтожной, а плотность — огромной, верно; если бы растяжение стало нулевым ($x_2 = 0$), $\rho_{\text{гр}} = \rho$ — груша плавала бы внутри воды, тоже верно.

Ответ. $\rho_{\text{гр}} = \dfrac{4}{3}$ г/см^3 $\approx 1{,}33$ г/см^3.