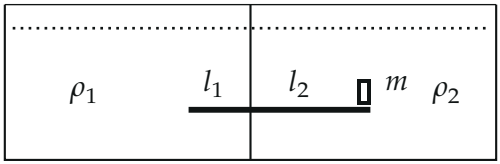
Рычаг в сосуде с маслом и водой

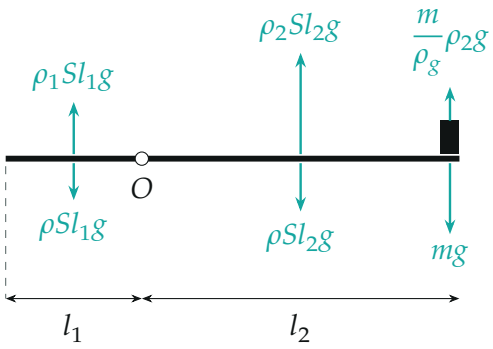
Задача 1. [Курчатов 2019/20, 8 класс, задача 1] Сосуд разделён перегородкой на две части. В правую часть налито масло, в левую — вода. Через перегородку проходит рычаг, который может вращаться на шарнире без трения. Рычаг имеет форму цилиндра с площадью основания $S = 0{,}5$ см^2. Плотность дерева, из которого сделан рычаг, равна $\rho = 630$ кг/м^3. Длина левого плеча рычага равна $l_1 = 30$ см, правого — $l_2 = 70$ см. Плотность воды равна $\rho_1 = 1000$ кг/м^3. Для того, чтобы рычаг оставался в равновесии, на край правого плеча рычага ставят гирьку массы $m = 50$ г с плотностью $\rho_g = 7800$ кг/м^3. Найдите плотность масла ρ_2. Ускорение свободного падения принять равным 10 м/с^2.



▲ **Решение. Что происходит.** Рычаг целиком в жидкостях: слева в воде, справа в масле, на правом конце — гирька, тоже в масле. На каждое плечо действуют сила тяжести и сила Архимеда, приложенные к середине плеча; на гирьку — её сила тяжести и своя сила Архимеда. Это задача на правило моментов: запишем его относительно шарнира — тогда сила реакции шарнира не войдёт в уравнение (её плечо равно нулю), и единственной неизвестной останется ρ_2.

Обозначения. O — шарнир; $V_г = m/\rho_g$ — объём гирьки. Моменты, поворачивающие рычаг против часовой стрелки (левый конец вверх), считаем положительными.

1. Силы. Плечо l_1 (вода): сила тяжести $\rho S l_1 g$ вниз и сила Архимеда $\rho_1 S l_1 g$ вверх, обе в середине плеча, на расстоянии $l_1/2$ от O. Плечо l_2 (масло): $\rho S l_2 g$ вниз и $\rho_2 S l_2 g$ вверх на расстоянии $l_2/2$. Гирька на конце, на расстоянии l_2: mg вниз и $\rho_2 V_г g = \dfrac{m}{\rho_g}\rho_2 g$ вверх (рисунок 2).

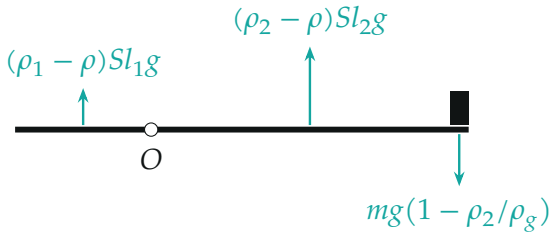


Силы на рычаг с гирькой. Силы на каждое плечо приложены к его середине, на гирьку — на конце правого плеча.

2. Правило моментов относительно шарнира. Сумма моментов всех сил равна нулю:

$$(\rho_1 - \rho)Sl_1 g\,\frac{l_1}{2} - (\rho_2 - \rho)Sl_2 g\,\frac{l_2}{2} + \Big(mg - \frac{m}{\rho_g}\rho_2 g\Big)l_2 = 0.$$

Слева «всплывает» левое плечо (вода плотнее дерева) — момент против часовой стрелки; справа плечо выталкивается маслом — момент по часовой стрелке; гирька в масле весит меньше mg, но тянет правый конец вниз — снова против часовой (рисунок 3).



Те же силы, сложенные попарно: на каждое плечо — разность силы Архимеда и силы тяжести, на гирьку — её вес в масле.

3. Плотность масла. Перенесём слагаемые с ρ_2 влево, сократим на g:

$$\rho_2\Big(\frac{Sl_2^2}{2} + \frac{m}{\rho_g}l_2\Big) = (\rho_1 - \rho)\frac{Sl_1^2}{2} + \rho\,\frac{Sl_2^2}{2} + ml_2,$$

$$\rho_2 = \frac{S(\rho_1 l_1^2 - \rho l_1^2 + \rho l_2^2) + 2ml_2}{Sl_2^2 + \dfrac{2m}{\rho_g} l_2}.$$

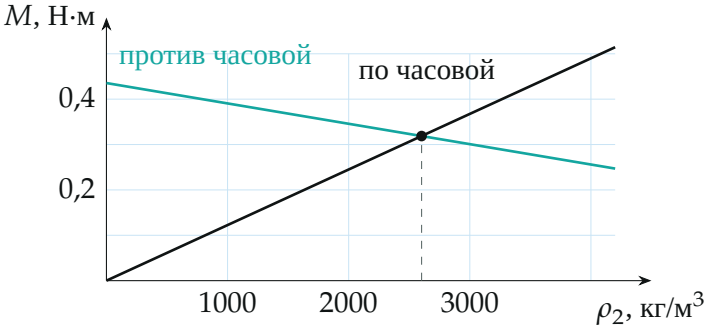
Числа в СИ: $S = 5 \cdot 10^{-5}$ м^2, $l_1 = 0{,}3$ м, $l_2 = 0{,}7$ м, $m = 0{,}05$ кг:

$$\rho_2 = \frac{5 \cdot 10^{-5}\,(90 - 56{,}7 + 308{,}7) + 0{,}07}{5 \cdot 10^{-5} \cdot 0{,}49 + 8{,}97 \cdot 10^{-6}} \ \frac{\text{кг}}{\text{м}^3},$$

$$\rho_2 = \frac{0{,}0871}{3{,}347 \cdot 10^{-5}} \ \frac{\text{кг}}{\text{м}^3} \approx 2600 \ \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}.$$

Обратите внимание. Гирька тоже в масле, и на неё действует сила Архимеда $\dfrac{m}{\rho_g}\rho_2 g$ — она содержит искомую ρ_2 и поэтому стоит в знаменателе ответа. Если её забыть, получится $\rho_2 \approx 3560$ кг/м^3. У организаторов в итоговой формуле в знаменателе $\dfrac{m}{\rho_g} l_2$ без множителя 2 (опечатка: по ней выходит ≈ 3000 кг/м^3), числовой ответ 2600 кг/м^3 у них верный.

Проверка. Размерность: $\dfrac{\text{м}^2 \cdot \text{кг/м}^3 \cdot \text{м}^2}{\text{м}^4} = \text{кг/м}^3$. Второй способ — графический (рисунок 4): момент против часовой стрелки убывает с ростом ρ_2 (гирька в более плотном масле легче), момент по часовой растёт; прямые пересекаются при $\rho_2 \approx 2600$ кг/м^3. Подстановка: при $\rho_2 = 2602$ кг/м^3 оба момента равны 0,319 Н·м.



Моменты сил относительно шарнира в зависимости от плотности масла:

бирюзовая — поворачивающие против часовой стрелки, чёрная — по часовой. Равновесие — в точке пересечения, $\rho_2 \approx 2600$ кг/м^3.

Физический смысл: лёгкое (по сравнению с водой) дерево левого плеча всплывает в воде, а правое, более длинное плечо удерживается от всплытия гирькой — масло должно быть плотным, чтобы выталкивание правого плеча уравновесило и то и другое.

Ответ. $\rho_2 = \dfrac{S(\rho_1 l_1^2 - \rho l_1^2 + \rho l_2^2) + 2ml_2}{Sl_2^2 + 2ml_2/\rho_g} \approx 2600$ кг/м^3.