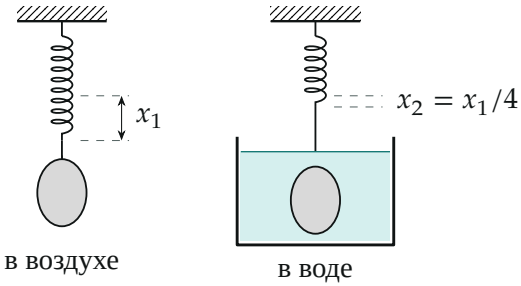
Груша и динамометр с тазом воды

Задача 2. [Курчатов 2019/20, 8 класс, задача 2] Вова хочет найти плотность сорванной им неспелой груши, но под рукой у него имеются лишь таз с водой и динамометр. Взвесив грушу при помощи динамометра в воздухе, Вова установил растяжение пружины — 1,2 сантиметра. При погружении груши целиком в таз с водой растяжение пружины динамометра оказалось в 4 раза меньше. Найдите плотность груши. Ускорение свободного падения можно считать равным 10 м/с^2, плотность воды равна 1 г/см^3.



Поясняющий рисунок: груша на динамометре в воздухе и целиком в воде. Пунктир — конец нерастянутой пружины и её конец под нагрузкой.

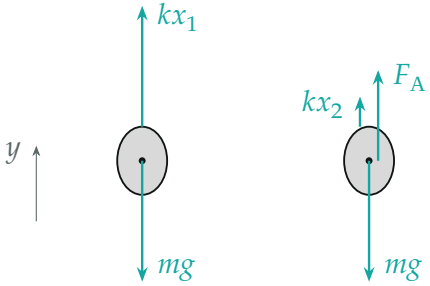
▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на гидростатическое взвешивание. В воздухе пружина держит весь вес груши — так находим массу. В воде часть веса берёт на себя сила Архимеда, и пружина растягивается меньше; разница растяжений даёт силу Архимеда, а значит, объём груши. Плотность — масса, делённая на объём. Жёсткость пружины k не дана, но она сократится.

Обозначения. m, V, $\rho_{\text{гр}}$ — масса, объём и плотность груши; ρ — плотность воды; k — жёсткость пружины; $x_1 = 1{,}2$ см и $x_2 = x_1/4 = 0{,}3$ см — растяжения в воздухе и в воде. Ось y — вверх. Груша в обоих случаях покоится.

1. Взвешивание в воздухе: условие равновесия груши (первый закон Ньютона). На грушу действуют сила упругости kx_1 вверх и сила

тяжести mg вниз (рисунок 2, слева); силой Архимеда в воздухе пренебрегаем. В проекции на ось y:

$$kx_1 - mg = 0 \quad \Rightarrow \quad m = \frac{kx_1}{g}.$$



в воздухе в воде

Силы на грушу. Длины стрелок — в масштабе: $kx_2 = \frac{1}{4}\,mg$, $F_A = \frac{3}{4}\,mg$.

2. Взвешивание в воде: условие равновесия груши. Теперь вверх действуют сила упругости kx_2 и сила Архимеда $F_A = \rho V g$ (груша целиком в воде), вниз — mg:

$$kx_2 + \rho V g - mg = 0.$$

Подставим $mg = kx_1$ из пункта 1:

$$\rho V g = k\,(x_1 - x_2) \quad \Rightarrow \quad V = \frac{k\,(x_1 - x_2)}{\rho g}.$$

Сила Архимеда равна «потере веса» — уменьшению показания динамометра (рисунок 3).

$mg = kx_1$	
kx_2	$F_A = \rho V g$

Вес груши в воде делится между пружиной и силой Архимеда: пружине — четверть, воде — три четверти.

3. Плотность. Разделим массу на объём; k и g сокращаются:

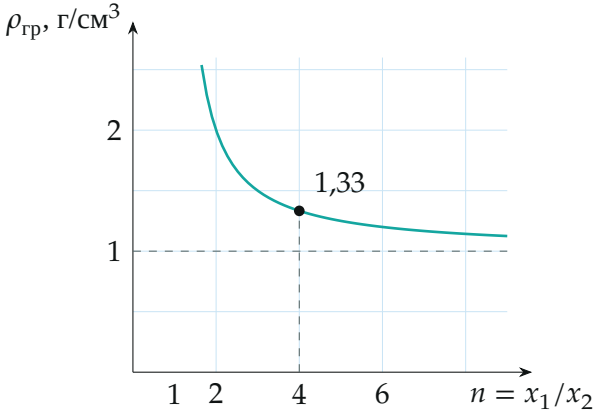
$$\rho_{\text{гр}} = \frac{m}{V} = \frac{kx_1}{g} \cdot \frac{\rho g}{k\,(x_1 - x_2)} = \rho\,\frac{x_1}{x_1 - x_2},$$

$$\rho_{\text{гр}} = 1\ \frac{\text{г}}{\text{см}^3} \cdot \frac{1{,}2}{1{,}2 - 0{,}3} = \frac{4}{3}\ \frac{\text{г}}{\text{см}^3} \approx 1{,}33\ \frac{\text{г}}{\text{см}^3}.$$

Плотность больше плотности воды — груша тонет, поэтому её и можно взвесить целиком в воде, натянув пружину.

Обратите внимание. Ответ зависит только от отношения растяжений $n = x_1/x_2 = 4$: $\rho_{\text{гр}} = \rho\,\dfrac{n}{n-1}$. Ни 1,2 см, ни g в ответ не входят — это данные «для правдоподобия».

Проверка. Размерность: $\rho \cdot \dfrac{\text{см}}{\text{см}} = \text{г/см}^3$. Пределы (рисунок 4): если в воде пружина почти не растянута ($n \to \infty$), груша почти не тяжелее воды — $\rho_{\text{гр}} \to \rho$; если растяжение почти не изменилось ($n \to 1$), сила Архимеда ничтожна по сравнению с весом — груша очень плотная, $\rho_{\text{гр}} \to \infty$. Оба предела разумны.



Плотность груши в зависимости от отношения растяжений n; точка — данные задачи. Пунктир — плотность воды, к ней кривая подходит при больших n.

Физический смысл: динамометр в воде измеряет вес груши за вычетом веса вытесненной ею воды; отношение полного веса к весу вытесненной воды и есть отношение плотностей: $\rho_{\text{гр}}/\rho = 1/(3/4)$.

Ответ. $\rho_{\text{гр}} = \rho \dfrac{x_1}{x_1 - x_2} = \dfrac{4}{3}$ г/см^3 $\approx 1{,}33$ г/см^3.