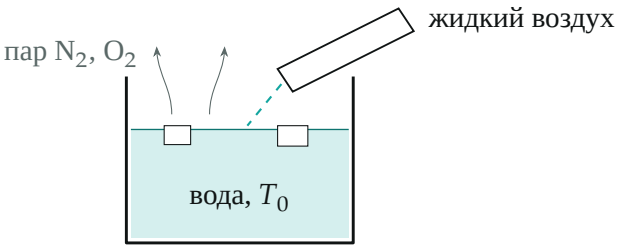
Лёд из воды и жидкого воздуха

Задача 3. [Курчатов 2019/20, 8 класс, задача 3] Сотрудник лаборатории сверхпроводимости хочет изготовить немного льда для коктейльной вечеринки. Для этого он наливает в открытый сосуд 4 литра дистиллированной воды при температуре $T_0 = 25\,^\circ\text{C}$ и начинает понемногу подливать в сосуд сжиженный воздух, имеющий максимальную температуру, при которой все его компоненты ещё находятся в жидком состоянии. Вода и жидкий воздух активно перемешиваются между собой в процессе приготовления смеси. По мере испарения воздуха, его доливают ещё, повторяя до получения нужного количества смеси льда с водой. Сколько понадобится жидкого воздуха, чтобы превратить в лёд ровно четверть имеющейся воды? Считать, что воздух содержит 20% кислорода и 80% азота по массе. Температура кипения жидкого азота $T_{N_2} = -195{,}8\,^\circ\text{C}$, температура кипения жидкого кислорода $T_{O_2} = -183{,}0\,^\circ\text{C}$. Удельная теплоёмкость жидкого азота $C_{N_2} = 1970$ Дж/(кг·°C), удельная теплоёмкость жидкого кислорода $C_{O_2} = 1670$ Дж/(кг·°C). Считать, что компоненты жидкого воздуха ведут себя как отдельные вещества. Теплоёмкостью сосуда и его теплообменом с окружающей средой можно пренебречь. Удельная теплоёмкость воды $C = 4200$ Дж/(кг·°C), удельная теплота плавления льда $\lambda = 3{,}4 \cdot 10^5$ Дж/кг, удельная теплота парообразования азота и кислорода — $L_{N_2} = 2{,}10 \cdot 10^5$ Дж/кг, $L_{O_2} = 2{,}14 \cdot 10^5$ Дж/кг соответственно.



Поясняющий рисунок: в воду подливают жидкий воздух, он выкипает, вода остывает и начинает замерзать.

▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на тепловой баланс с фазовыми переходами. Воздух берут при $T_{N_2} = -195{,}8\,^\circ\text{C}$ — самой высокой

температуре, при которой и азот, и кислород ещё жидкие (выше азот кипит). В воде азот сразу выкипает при своей температуре кипения, а кислород сначала нагревается до $-183\,^\circ\mathrm{C}$ и только потом выкипает. Всю нужную для этого теплоту отдаёт вода: сначала остывая от $25\,^\circ\mathrm{C}$ до $0\,^\circ\mathrm{C}$, потом замерзая. Испарившийся газ уходит из открытого сосуда, его нагревом после кипения пренебрегаем (теплоёмкости газов не даны).

Обозначения. $m = 4$ кг — масса воды (4 л); m^* — масса жидкого воздуха; q — теплота, которую забирает 1 кг жидкого воздуха, выкипая.

1. Сколько теплоты отдаёт вода. Остывание всей воды до $0\,^\circ\mathrm{C}$ и кристаллизация четверти её массы:

$$Q_1 = Cm\,(T_0 - 0) = 4200 \cdot 4 \cdot 25 \text{ Дж} = 420 \text{ кДж},$$

$$Q_2 = \lambda\,\frac{m}{4} = 3{,}4 \cdot 10^5 \cdot 1 \text{ Дж} = 340 \text{ кДж}.$$

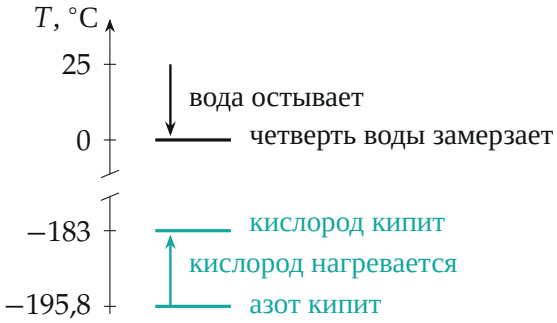
Пока вода не остыла до $0\,^\circ\mathrm{C}$, льда нет: перемешивание выравнивает температуру, и лёд появляется только при $0\,^\circ\mathrm{C}$.

2. Сколько теплоты забирает 1 кг жидкого воздуха. Шкала температур процессов — на рисунке 2. В 1 кг воздуха 0,8 кг азота и 0,2 кг кислорода. Азот выкипает при той температуре, при которой его налили: $0{,}8\,L_{N_2}$. Кислород нагревается на $T_{O_2} - T_{N_2} = 12{,}8\,^\circ\mathrm{C}$ и выкипает: $0{,}2\,(C_{O_2}(T_{O_2} - T_{N_2}) + L_{O_2})$. Итого

$$q = 0{,}8\,L_{N_2} + 0{,}2\,(C_{O_2}(T_{O_2} - T_{N_2}) + L_{O_2}),$$

$$q = (168 + 4{,}3 + 42{,}8) \text{ кДж/кг} \approx 215 \text{ кДж/кг}.$$

Теплоёмкость жидкого азота C_{N_2} не понадобилась: азот не нагревается в жидком виде — он уже при температуре кипения.



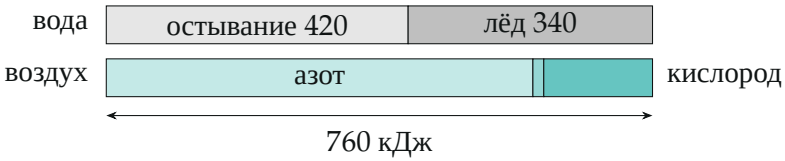
Температуры процессов (шкала с разрывом): вода отдаёт теплоту при $25 \to 0\,^\circ C$ *и при* $0\,^\circ C$*, воздух получает её при* $-195{,}8\,^\circ C$ *и* $-195{,}8 \to -183\,^\circ C$*.*

3. Уравнение теплового баланса. Сосуд не обменивается теплотой со средой, его теплоёмкость не учитываем, поэтому теплота, отданная водой, равна теплоте, полученной жидким воздухом:

$$CmT_0 + \lambda\frac{m}{4} = m^*\left(0{,}8\,L_{N_2} + 0{,}2\,L_{O_2} + 0{,}2\,C_{O_2}\,(T_{O_2} - T_{N_2})\right),$$

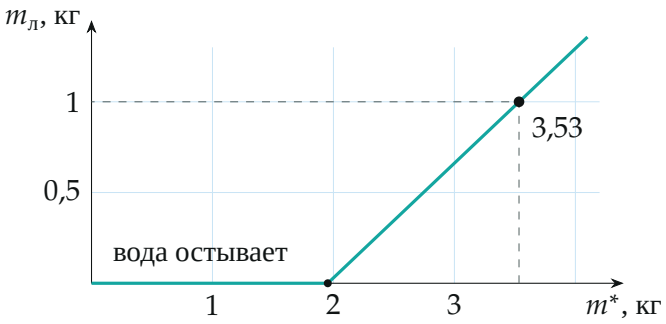
$$m^* = \frac{m\left(CT_0 + \dfrac{\lambda}{4}\right)}{0{,}8\,L_{N_2} + 0{,}2\,L_{O_2} + 0{,}2\,C_{O_2}\,(T_{O_2} - T_{N_2})},$$

$$m^* = \frac{760\text{ кДж}}{215{,}1\text{ кДж/кг}} \approx 3{,}5\text{ кг}.$$



Баланс теплоты для $m^* = 3{,}53$ *кг воздуха: сверху — что отдала вода, снизу — что получил воздух (узкая полоска — нагрев кислорода,* 15 *кДж).*

4. Как идёт процесс — качественная картина. Первые $Q_1/q = 420/215 \approx 1{,}95$ кг воздуха только охлаждают воду до нуля, льда нет. Каждый следующий килограмм воздуха замораживает $q/\lambda \approx 0{,}63$ кг воды, и к $m^* \approx 3{,}53$ кг лёд достигает 1 кг — четверти воды (рисунок 4).



Масса льда в сосуде в зависимости от массы выкипевшего жидкого воздуха.

Обратите внимание. Нагревать до кипения нужно только кислород: воздух налит при температуре кипения азота, поэтому азот кипит сразу, а теплоёмкость C_{N_2} в условии лишняя.

Проверка. Размерность: $\dfrac{\text{кг} \cdot \text{Дж/кг}}{\text{Дж/кг}} = \text{кг}$. Оценка: вклад нагрева кислорода мал (2% от q), без него $m^* = 760/210{,}8 \approx 3{,}6$ кг — того же порядка; теплота испарения у азота и кислорода почти одинакова, поэтому q близко к $2{,}1 \cdot 10^5$ Дж/кг и ответ $\approx 3{,}5$ кг разумен.

Физический смысл: на заморозку килограмма льда с охлаждением 4 л воды от комнатной температуры нужно выпарить почти втрое больше по массе жидкого воздуха — теплота испарения азота в 1,6 раза меньше теплоты плавления льда.

Ответ. $m^* = \dfrac{m\,(CT_0 + \lambda/4)}{0{,}8\,L_{N_2} + 0{,}2\,L_{O_2} + 0{,}2\,C_{O_2}(T_{O_2} - T_{N_2})} \approx 3{,}5$ кг.