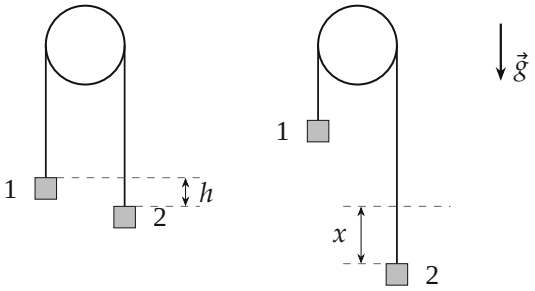
Массивная нить на трубе с грузами

Задача 1. [Курчатов 2019/20, 9 класс, задача 1] Через жёстко закреплённую горизонтальную трубу переброшена нерастяжимая нить массой $m = 10$ г и длиной $L = 2{,}5$ м. Масса нити равномерно распределена по её длине. К концам нити прикреплены два одинаковых груза 1 и 2 массой $M = 20$ г каждый. В начальном положении груз 2 расположен на высоте $h = 0{,}1$ м ниже груза 1. Грузы отпускают без начальной скорости. Найдите разность $\Delta T = T_1 - T_2$, где T_1 и T_2 — силы, с которыми нить действует на грузы 1 и 2 в момент, когда груз 2 опустился на высоту $x = 0{,}2$ м относительно своего начального положения. Числовой ответ выразите в миллиньютонах. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2; трение не учитывайте.



Слева — начальное положение, справа — момент, когда груз 2 опустился на x.

▲ **Решение.** **Что происходит.** Нить тяжёлая, и её «лишний» кусок со стороны груза 2 перевешивает: система грузы + нить разгоняется, груз 2 идёт вниз, груз 1 — вверх. Чем дальше опускается груз 2, тем больше перевес нити, поэтому ускорение растёт с x. Разность натяжений у грузов создаётся этим ускорением. Главная идея — второй закон Ньютона для всей системы *вдоль нити*: движущая сила — только вес перевеса нити.

Обозначения. a — модуль ускорения грузов в рассматриваемый момент (у всех точек нити он тот же: нить нерастяжима); l_1, l_2 — длины

вертикальных кусков нити над грузами 1 и 2; $\lambda = m/L$ — масса единицы длины нити. Ось y направим вниз, вдоль $\vec{g}$. Радиус трубы много меньше L, и кусок нити на трубе при движении не меняет формы.

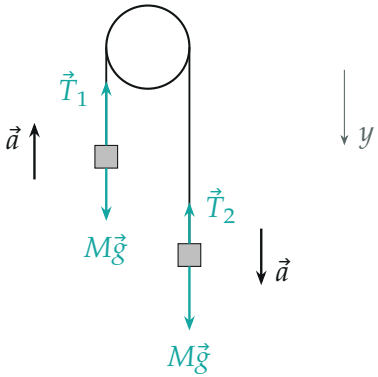
1. Второй закон Ньютона для каждого груза. На груз 1 действуют $\vec{T}_1$ вверх и $M\vec{g}$ вниз; он ускоряется вверх. На груз 2 — $\vec{T}_2$ и $M\vec{g}$; он ускоряется вниз (рисунок 2). Векторно $M\vec{a}_1 = \vec{T}_1 + M\vec{g}$, $M\vec{a}_2 = \vec{T}_2 + M\vec{g}$; в проекции на ось y:

$$-Ma = Mg - T_1, \qquad Ma = Mg - T_2.$$

Отсюда $T_1 = M(g + a)$, $T_2 = M(g - a)$ и

$$\Delta T = T_1 - T_2 = 2Ma.$$

Груз 1 разгоняется вверх, поэтому нить тянет его сильнее веса; груз 2 — слабее. Неизвестным осталось только ускорение.

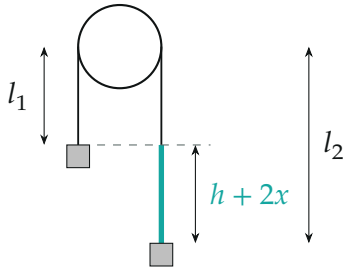


Силы на грузы: у груза 1 натяжение больше веса, у груза 2 — меньше.

2. Перевес нити. Нить нерастяжима: на сколько опустился груз 2, на столько же поднялся груз 1. Значит, правый вертикальный кусок удлинился на x, левый укоротился на x — кусок длиной x перешёл слева направо. В начале $l_2 - l_1 = h$ (груз 2 ниже на h), в рассматриваемый момент

$$l_2 - l_1 = h + 2x.$$

Это и есть перевес — выделенный кусок на рисунке 3.



Нить в рассматриваемый момент: выделен перевес правого куска над левым, его длина $l_2 - l_1 = h + 2x$.

3. Второй закон Ньютона для системы «грузы + нить» вдоль нити. Возьмём проекции сил на направление движения вдоль нити (справа — вниз, слева — вверх). Натяжения внутри системы сокращаются, сила реакции трубы перпендикулярна нити и в проекцию не входит, а силы тяжести куска нити на трубе дают ноль: кусок симметричен и не меняется. Остаются силы тяжести вертикальных частей:

$$(2M + m)\,a = (M + \lambda l_2)g - (M + \lambda l_1)g = \frac{m}{L}\,(h + 2x)\,g.$$

Веса одинаковых грузов уравновешены, разгоняет всю массу $2M + m$ только вес перевеса. Отсюда

$$a = \frac{mg\,(h + 2x)}{(2M + m)L} = \frac{0{,}01 \cdot 10 \cdot 0{,}5}{0{,}05 \cdot 2{,}5}\ \text{м/с}^2 = 0{,}4\ \text{м/с}^2.$$

4. Второй способ — закон сохранения энергии. Внутренних потерь нет, трения нет, поэтому кинетическая энергия системы равна работе силы тяжести. Работы над грузами сокращаются ($-Mgx$ и $+Mgx$). У нити конечное положение получается из начального, если кусок длиной x снять с верха левой части и подвесить внизу правой; его центр опускается на $x + h$. Значит,

$$\frac{(2M + m)V^2}{2} = \frac{m}{L}\,x\,g\,(x + h), \qquad V^2 = \frac{2mg\,x(x + h)}{(2M + m)L}.$$

За малое перемещение dx скорость меняется на dV, причём $d(V^2) = 2V\,dV = 2a\,dx$ (так как $dx = V\,dt$, $dV = a\,dt$). Дифференцируем:

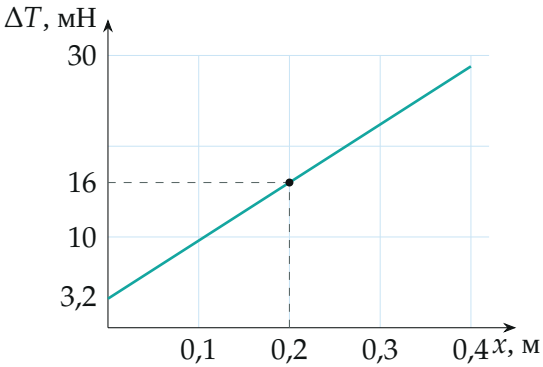
$$a = \frac{1}{2}\frac{d(V^2)}{dx} = \frac{mg\,(2x+h)}{(2M+m)L},$$

то же, что в пункте 3.

5. Ответ. Соберём:

$$\Delta T = 2Ma = \frac{2mMg\,(h+2x)}{(2M+m)L} = 2\cdot 0{,}02\cdot 0{,}4\ \text{Н} = 1{,}6\cdot 10^{-2}\ \text{Н} = 16\ \text{мН}.$$

Разность натяжений растёт с x линейно (рисунок 4): уже в начальный момент она 3,2 мН, а при $x = 0{,}2$ м — 16 мН.



Разность натяжений ΔT в зависимости от смещения x груза 2; точка — момент из условия.

Обратите внимание. Натяжения T_1 и T_2 относятся к концам нити у грузов. Внутри нити натяжение меняется от точки к точке (нить тяжёлая), поэтому «натяжение нити одно» здесь неверно — уравнение пишем для системы целиком.

Проверка. Размерность: $\dfrac{[\text{кг}\cdot\text{кг}\cdot\text{м/с}^2\cdot\text{м}]}{[\text{кг}\cdot\text{м}]} = \text{Н}$. Предел: при $m \to 0$ (невесомая нить) $\Delta T \to 0$ — одинаковые грузы на лёгкой нити не ускоряются, и натяжения равны. Энергетический способ дал то же ускорение.

Физический смысл: вся система разгоняется весом перевеса нити, а разность натяжений на грузах — это та сила, которая сообщает ускорение двум грузам.

Ответ. $\Delta T = \dfrac{2mMg\,(h+2x)}{(2M+m)L} = 16$ мН.