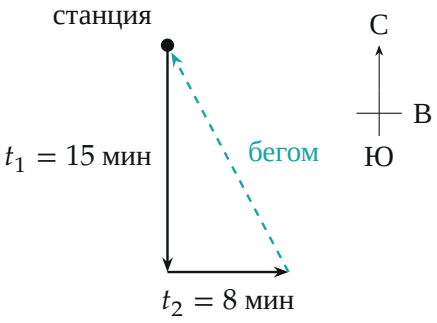
Красная Шапочка ускоряет шаг

Задача 2. [Курчатов 2019/20, 9 класс, задача 2] Красная Шапочка опоздала на электричку к бабушке и теперь должна ждать следующую, которая прибудет через полчаса. Чтобы скоротать время, она решила прогуляться: в течение $t_1 = 15$ минут она шла строго на юг с постоянной скоростью, затем повернула на восток и шла ещё $t_2 = 8$ минут с этой же скоростью. Вспомнив о времени прибытия электрички, она побежала к станции по кратчайшему пути, причём на каждый шаг, начиная со второго, она тратит на 0,1% времени меньше, чем на предыдущий. Успеет ли Красная Шапочка на электричку, если скорость красной шапочки 1 шаг/с?



Поясняющий рисунок: маршрут прогулки (вид сверху) и обратный путь к станции.

▲ **Решение.** **Что происходит.** Сначала геометрия: путь на юг и путь на восток — катеты прямоугольного треугольника, кратчайшая дорога назад — его гипотенуза. Число шагов на ней найдём из теоремы Пифагора. Потом время: шаги становятся всё короче по времени, длительности шагов образуют геометрическую прогрессию, и полное время бега — её сумма. Остаётся сравнить его с запасом до электрички.

Обозначения. v — скорость ходьбы (1 шаг/с); t_3 — время, за которое она прошла бы обратный путь шагом; n — число шагов на обратном пути; τ_k — время k-го шага; q — знаменатель прогрессии; t — время бега.

1. Длина обратного пути: теорема Пифагора. Катеты маршрута — vt_1 и vt_2, гипотенуза vt_3:

$$(vt_1)^2 + (vt_2)^2 = (vt_3)^2, \qquad t_3 = \sqrt{t_1^2 + t_2^2} = \sqrt{15^2 + 8^2}\ \text{мин} = 17\ \text{мин}.$$

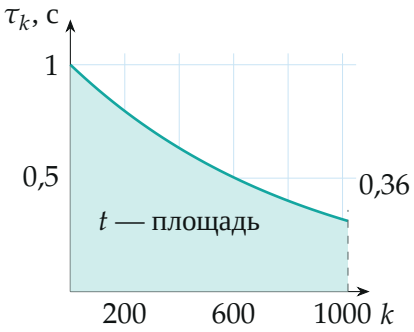
Длина шага при беге та же (условие говорит только о времени шага), поэтому шагов на обратном пути столько же, сколько сделала бы она шагом за 17 минут:

$$n = v\,t_3 = 1\ \text{шаг/с} \cdot 17 \cdot 60\ \text{с} = 1020.$$

2. Время шагов — геометрическая прогрессия. Первый шаг длится $\tau_1 = 1$ с (скорость 1 шаг/с), каждый следующий — на 0,1% короче предыдущего, то есть в $q = 1 - 0{,}001 = 0{,}999$ раза:

$$\tau_k = \tau_1 q^{k-1}.$$

На рисунке 2 — время шага в зависимости от его номера: к концу пути шаг занимает $0{,}999^{1019}$ с $\approx 0{,}36$ с, почти втрое меньше первого.



Время k-го шага: $\tau_k = 0{,}999^{k-1}$ с. Полное время бега — сумма всех τ_k, на графике это закрашенная площадь.

3. Время бега — сумма прогрессии. Сумма n первых членов геометрической прогрессии:

$$t = \tau_1 + \tau_1 q + \ldots + \tau_1 q^{n-1} = \tau_1 \frac{1 - q^n}{1 - q}.$$

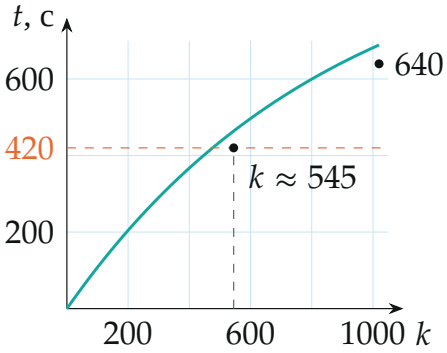
Подставим: $q^n = 0{,}999^{1020} \approx 0{,}360$ (посчитано на калькуляторе; оценка вручную: $q^n \approx e^{-0{,}001\cdot 1020}$),

$$t = 1\text{ с} \cdot \frac{1 - 0{,}360}{0{,}001} \approx 640\text{ с} \approx 10{,}7\text{ мин}.$$

4. Сравнение с запасом. Электричка придёт через 30 минут после начала прогулки, гуляла она $t_1 + t_2 = 23$ мин, значит, на бег остаётся

$$30 - 23 = 7\text{ мин} = 420\text{ с} < 640\text{ с}.$$

Не успеет. Рисунок 3 показывает это по шагам: время с начала бега растёт с числом сделанных шагов, и к 420-й секунде сделано только около 545 шагов из 1020 — чуть больше половины пути.



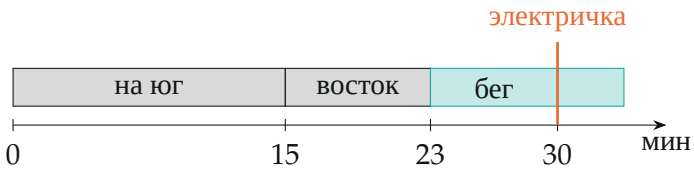
Время с начала бега после k шагов. К приходу электрички (420 с) сделано около 545 шагов из 1020.

Обратите внимание. Ускоряется не скорость в смысле длины шага, а темп: длина шага остаётся прежней, поэтому число шагов на обратном пути считается по скорости ходьбы. Даже бесконечно долгий бег по этой прогрессии занял бы не больше $\tau_1/(1-q) = 1000$ с, но и предел здесь не нужен: шагов конечное число.

Проверка. Если бы она не ускорялась ($q = 1$), обратный путь занял бы 17 мин; формула при $q \to 1$ даёт $t \to n\tau_1 = 1020$ с — то же. Ускорение сократило время бега с 17 до 10,7 мин, но этого мало: нужно 7.

Ответ можно увидеть и на рисунке 3: прямая 420 с пересекает кривую раньше, чем при $k = 1020$.

Физический смысл: средний темп бега всего в $1020/640 \approx 1{,}6$ раза выше темпа ходьбы, а нужно было бы в $1020/420 \approx 2{,}4$ раза.



Время по порядку: бег заканчивается на 33,7-й минуте, электричка приходит на 30-й.

Ответ. Не успеет: обратный путь занимает $t = \tau_1 \dfrac{1 - 0{,}999^{1020}}{0{,}001} \approx 640$ с $\approx 10{,}7$ мин, а до электрички остаётся 7 мин.