Два источника заменяют одним

Задача 4. [Курчатов 2019/20, 9 класс, задача 4] Элементы с внутренними сопротивлениями $r_1 = 5$ Ом и $r_2 = 2$ Ом и с ЭДС $\mathcal{E}_1 = 3$ В и $\mathcal{E}_2 = 10$ В соединены с внешним сопротивлением R, как показано на рисунке 1. Элементы с $\mathcal{E}_1$ и $\mathcal{E}_2$ заменяют на один элемент с ЭДС $\mathcal{E}$ и внутренним сопротивлением r, как показано на рисунке 2, при этом падение напряжения на внешнем резисторе не меняется для любого значения сопротивления R. Найдите значения $\mathcal{E}$ и r.

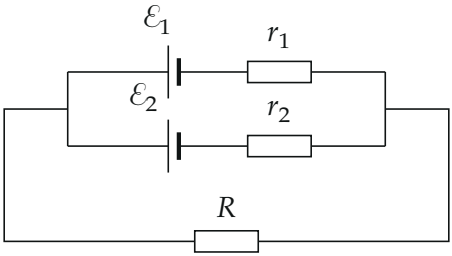


Рис. 1

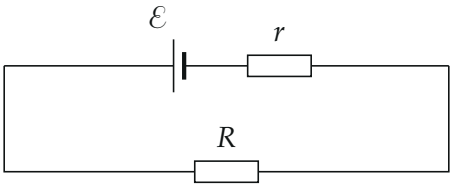
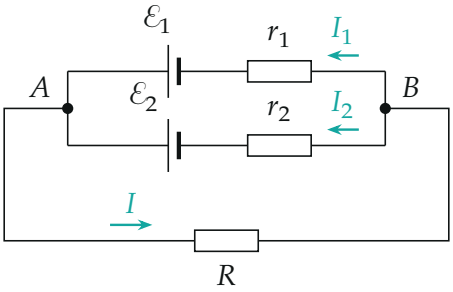


Рис. 2

▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на эквивалентный источник: два параллельных элемента ведут себя для внешней цепи как один. Для каждой схемы найдём напряжение на R как функцию R и потребуем, чтобы функции совпадали при всех R, — это даёт два уравнения на две неизвестные $\mathcal{E}$ и r. Вторым способом проверим ответ двумя предельными режимами: $R \to \infty$ (холостой ход) и $R = 0$ (короткое замыкание).

Обозначения. I_1, I_2 — токи через элементы, I — ток через R; направления — на рисунке 2 (от «−» к «+» внутри каждого элемента). Длинная тонкая черта элемента — «+», короткая толстая — «−»; оба элемента включены одинаково.



Токи в схеме 1: внутри элементов — от «−» к «+», через R — от узла A к узлу B.

1. Законы Кирхгофа для схемы 1. Первый закон для узла A: $I = I_1 + I_2$. Второй закон для контура «элемент 1 — R» и для контура «элемент 2 — R» (обход по направлению токов):

$$\mathcal{E}_1 = I_1 r_1 + IR, \qquad \mathcal{E}_2 = I_2 r_2 + IR.$$

Напряжение на R обозначим $U = IR$. Выразим токи элементов и сложим:

$$I_1 = \frac{\mathcal{E}_1 - U}{r_1}, \quad I_2 = \frac{\mathcal{E}_2 - U}{r_2}, \qquad \frac{U}{R} = \frac{\mathcal{E}_1}{r_1} + \frac{\mathcal{E}_2}{r_2} - U\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right).$$

Отсюда

$$U = \frac{\dfrac{\mathcal{E}_1}{r_1} + \dfrac{\mathcal{E}_2}{r_2}}{\dfrac{1}{R} + \dfrac{1}{r_1} + \dfrac{1}{r_2}}.$$

2. Закон Ома для полной цепи схемы 2: $I = \dfrac{\mathcal{E}}{r + R}$, значит,

$$U = \frac{\mathcal{E}R}{r + R} = \frac{\mathcal{E}/r}{\dfrac{1}{R} + \dfrac{1}{r}}.$$

3. Совпадение при любом R. Удобно сравнивать обратные величины

— они линейны по $1/R$:

$$\frac{1}{U} = \frac{1}{R}\cdot\frac{1}{\dfrac{\mathcal{E}_1}{r_1}+\dfrac{\mathcal{E}_2}{r_2}} + \frac{\dfrac{1}{r_1}+\dfrac{1}{r_2}}{\dfrac{\mathcal{E}_1}{r_1}+\dfrac{\mathcal{E}_2}{r_2}} \quad \text{и} \quad \frac{1}{U} = \frac{1}{R}\cdot\frac{r}{\mathcal{E}} + \frac{1}{\mathcal{E}}.$$

Две линейные функции $1/R$ равны при всех R, только если равны коэффициенты при $1/R$ и свободные члены:

$$\frac{\mathcal{E}}{r} = \frac{\mathcal{E}_1}{r_1} + \frac{\mathcal{E}_2}{r_2}, \qquad \frac{1}{\mathcal{E}} = \frac{\dfrac{1}{r_1}+\dfrac{1}{r_2}}{\dfrac{\mathcal{E}_1}{r_1}+\dfrac{\mathcal{E}_2}{r_2}}.$$

Получаем

$$\mathcal{E} = \frac{\dfrac{\mathcal{E}_1}{r_1}+\dfrac{\mathcal{E}_2}{r_2}}{\dfrac{1}{r_1}+\dfrac{1}{r_2}} = \frac{\mathcal{E}_1 r_2 + \mathcal{E}_2 r_1}{r_1+r_2} = \frac{3\cdot 2 + 10\cdot 5}{7}\ \text{В} = 8\ \text{В},$$

$$r = \frac{r_1 r_2}{r_1+r_2} = \frac{10}{7}\ \text{Ом} \approx 1{,}43\ \text{Ом}.$$

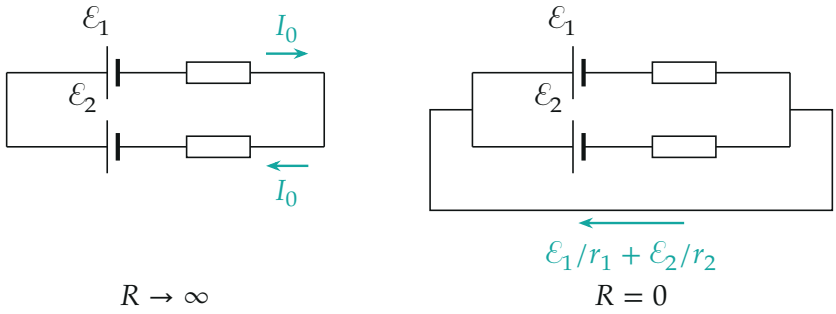
Внутреннее сопротивление — как у параллельно соединённых r_1 и r_2, а ЭДС — среднее $\mathcal{E}_1$ и $\mathcal{E}_2$ с весами $1/r_1$ и $1/r_2$.

4. Второй способ — два предельных режима. Если напряжения совпадают при любом R, они совпадают и в пределах.

Холостой ход, $R \to \infty$. Тока через R нет, но по кольцу из двух элементов течёт ток I_0 (рисунок 3, слева): второй закон Кирхгофа для кольца $\mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1 = I_0(r_1+r_2)$, $I_0 = 1$ А. Напряжение между A и B равно $\mathcal{E}_2 - I_0 r_2 = 10 - 2 = 8$ В. В схеме 2 при $R \to \infty$ напряжение равно $\mathcal{E}$, значит, $\mathcal{E} = 8$ В.

Короткое замыкание, $R = 0$. Узлы A и B соединены накоротко, каждый элемент замкнут сам на себя (рисунок 3, справа): $I =$

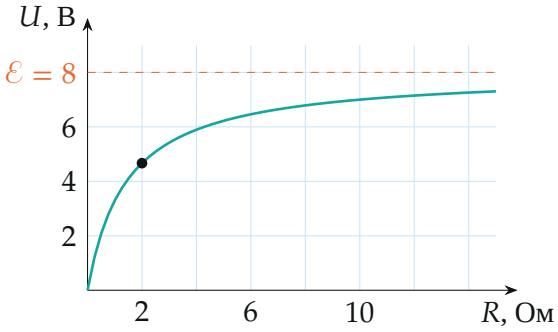
$\mathcal{E}_1/r_1 + \mathcal{E}_2/r_2 = 0{,}6 + 5 = 5{,}6$ А. В схеме 2 ток короткого замыкания $\mathcal{E}/r$, отсюда $r = 8/5{,}6$ Ом $= 10/7$ Ом. Ответы совпали.



Предельные режимы схемы 1. Слева — холостой ход: по кольцу из двух элементов течёт ток $I_0 = 1$ А. Справа — короткое замыкание: каждый элемент даёт свой ток короткого замыкания.

Обратите внимание. В режиме холостого хода ток I_0 идёт через первый элемент против его ЭДС: более сильный элемент заряжает более слабый. Поэтому $\mathcal{E} = 8$ В лежит между $\mathcal{E}_1$ и $\mathcal{E}_2$, а не равен их сумме или большему из них.

Проверка. Размерности: $\dfrac{\text{В} \cdot \text{Ом}}{\text{Ом}} = \text{В}$, $\dfrac{\text{Ом}^2}{\text{Ом}} = \text{Ом}$. Предел: при $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_2$ формула даёт $\mathcal{E} = \mathcal{E}_1$ — одинаковые элементы параллельно дают ту же ЭДС. Численно: при $R = 2$ Ом схема 1 даёт $U = 5{,}6/(0{,}5 + 0{,}7)$ В $= 4{,}67$ В, схема 2 — $8 \cdot 2/(2 + 1{,}43)$ В $= 4{,}67$ В. Общий график $U(R)$ — на рисунке 4.



Напряжение на внешнем резисторе $U = \mathcal{E}R/(r + R)$ при $\mathcal{E} = 8$ В, $r = 10/7$ Ом; обе схемы дают одну кривую. При $R \to \infty$ она подходит к $\mathcal{E}$.

Физический смысл: любая цепь из элементов и резисторов для внешней нагрузки — это один эквивалентный элемент; его ЭДС — напряжение холостого хода, а $\mathcal{E}/r$ — ток короткого замыкания.

Ответ. $\mathcal{E} = \dfrac{\mathcal{E}_1 r_2 + \mathcal{E}_2 r_1}{r_1 + r_2} = 8$ В, $r = \dfrac{r_1 r_2}{r_1 + r_2} = \dfrac{10}{7}$ Ом $\approx 1{,}43$ Ом.