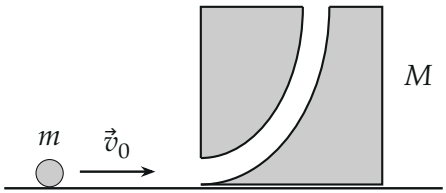
Шар пролетает сквозь подвижный куб

Задача 5. [Курчатов 2019/20, 9 класс, задача 5] В кубе массы M просверлено отверстие так, что шар массы m может войти горизонтально, а затем пройти через куб и вылететь вертикально вверх. Шар и куб расположены на поверхности без трения, куб изначально находится в покое. Рассмотрим ситуацию, в которой шар движется горизонтально со скоростью v_0. Шар попадает в куб и выбрасывается из верхней части куба. Предположим, что нет потерь на трение, когда шар проходит через куб, и шар поднимается на высоту, намного превышающую размеры куба. Затем шар возвращается на уровень куба, где он входит в верхнее отверстие, а затем выбрасывается из бокового отверстия. Определите время возврата шарика в положение, в котором происходит первоначальное столкновение, в терминах отношения масс $\beta = \dfrac{M}{m} > 0$, скорости v_0 и ускорения свободного падения g.



▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на законы сохранения при «ударе» через гладкий канал. Пока шар идёт по каналу, горизонтальные силы между шаром и кубом внутренние, а снаружи по горизонтали ничего не действует — горизонтальный импульс системы сохраняется. Трения нет — сохраняется и механическая энергия. Вылетает шар вертикально *относительно куба*, то есть с той же горизонтальной скоростью, что у куба; поэтому в полёте он всё время над отверстием и падает точно в него. Второй проход по каналу — тот же процесс наоборот, и шар выкатывается из бокового отверстия назад. Время шара внутри куба мало по сравнению с полётом (высота подъёма много больше размера куба), им пренебрегаем.

Обозначения. Ось x — горизонтально по $\vec{v}_0$, ось y — вверх. v_1 — общая горизонтальная скорость шара и куба после первого прохода; v_2 — вертикальная скорость шара при вылете; u и V — горизонтальные скорости шара и куба после второго прохода; t_2 — время полёта, t_3 — время обратного пути шара до места первого столкновения, s — смещение за полёт.

1. Первый проход: закон сохранения горизонтального импульса системы шар + куб. Внешние силы — тяжести и реакции пола — вертикальны, поэтому p_x сохраняется. После прохода горизонтальные скорости шара и куба равны (вылет вертикальный относительно куба):

$$mv_0 = (m+M)\,v_1 \quad \Rightarrow \quad v_1 = \frac{mv_0}{m+M} = \frac{v_0}{1+\beta}.$$

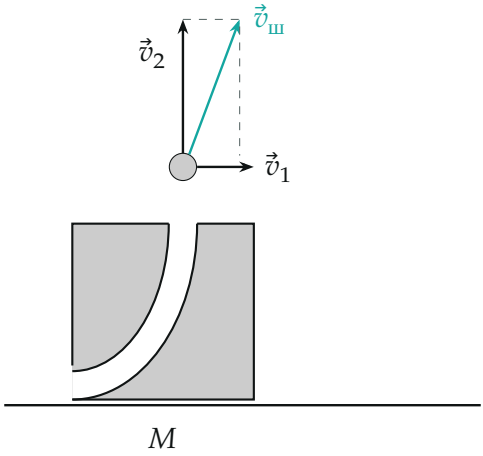
2. Первый проход: закон сохранения механической энергии. Канал гладкий, потерь нет. Подъём шара на высоту куба пренебрежимо мал по сравнению с высотой полёта, поэтому сравниваем кинетические энергии до входа и сразу после вылета:

$$\frac{mv_0^2}{2} = \frac{Mv_1^2}{2} + \frac{m\,(v_1^2+v_2^2)}{2}.$$

Отсюда, с учётом $(m+M)v_1 = mv_0$,

$$v_2^2 = v_0^2 - \frac{m+M}{m}\,v_1^2 = v_0^2\Big(1 - \frac{m}{m+M}\Big), \qquad v_2 = v_0\sqrt{\frac{\beta}{1+\beta}}.$$

Скорость шара при вылете — сумма горизонтальной v_1 и вертикальной v_2 (рисунок 2).



Момент вылета: куб и шар имеют одинаковую горизонтальную скорость $\vec{v}_1$, у шара есть ещё вертикальная $\vec{v}_2$; полная скорость шара $\vec{v}_ш$.

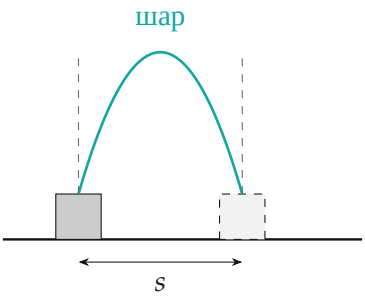
3. Полёт: равноускоренное движение шара. По вертикали шар летит вверх с v_2 и возвращается на уровень куба через

$$t_2 = \frac{2v_2}{g} = \frac{2v_0}{g}\sqrt{\frac{\beta}{1+\beta}}.$$

По горизонтали ускорения нет; куб тоже едет равномерно со скоростью v_1 (трения нет), поэтому шар всё время над отверстием и падает в него. За полёт шар и куб смещаются на

$$s = v_1 t_2 = \frac{2v_0^2}{g}\,\frac{\sqrt{\beta}}{(1+\beta)^{3/2}}.$$

Траектория шара относительно пола — парабола на рисунке 3.



Полёт шара относительно пола, построено для $\beta = 3$: $v_1 = v_0/4$, $v_2 \approx 0{,}87\,v_0$. За время полёта куб (сплошной — в начале, пунктир — в конце) проезжает то же расстояние s.

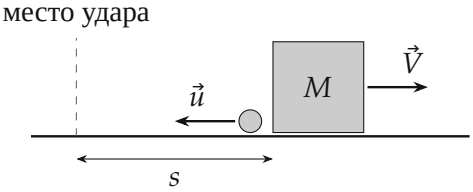
4. Второй проход: те же законы сохранения. До входа у шара горизонтальная скорость v_1, у куба — v_1, полный горизонтальный импульс по-прежнему mv_0, энергия — $mv_0^2/2$. После прохода шар движется горизонтально со скоростью u, куб — V:

$$mu + MV = mv_0, \qquad \frac{mu^2}{2} + \frac{MV^2}{2} = \frac{mv_0^2}{2}.$$

Это система упругого центрального удара шара, налетающего со скоростью v_0 на покоящийся куб. Её решения: $u = v_0$, $V = 0$ — или

$$u = \frac{m-M}{m+M}\,v_0 = -\frac{\beta-1}{\beta+1}\,v_0, \qquad V = \frac{2m}{m+M}\,v_0.$$

Первое решение отбрасываем: шар выходит из *бокового* отверстия, то есть движется относительно куба назад, $u - V < 0$; у первого решения $u - V = v_0 > 0$, у второго $u - V = -v_0$. При $\beta > 1$ скорость u отрицательна — шар едет назад к месту первого столкновения (рисунок 4).



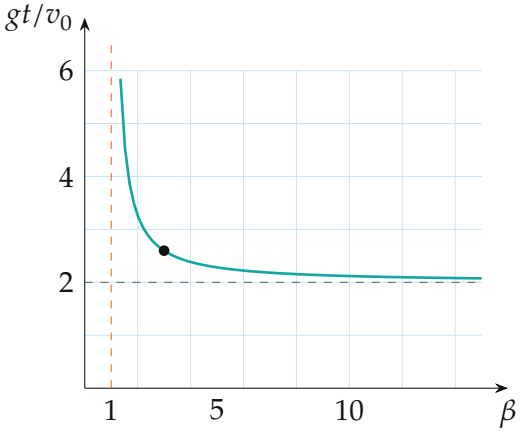
После второго прохода ($\beta > 1$): шар выкатился из бокового отверстия назад со скоростью $\vec{u}$ на расстоянии s от места первого удара, куб уехал вперёд.

5. Возврат и полное время. Боковое отверстие теперь на расстоянии s от места первого удара (размер куба мал). Шар едет назад равномерно:

$$t_3 = \frac{s}{|u|} = \frac{2v_0}{g}\sqrt{\frac{\beta}{1+\beta}}\cdot\frac{1}{1+\beta}\cdot\frac{\beta+1}{\beta-1} = \frac{2v_0}{g}\sqrt{\frac{\beta}{1+\beta}}\cdot\frac{1}{\beta-1}.$$

Соберём полное время от первого удара до возвращения:

$$t = t_2 + t_3 = \frac{2v_0}{g}\sqrt{\frac{\beta}{1+\beta}}\left(1+\frac{1}{\beta-1}\right) = \frac{2v_0}{g}\sqrt{\frac{\beta}{1+\beta}}\cdot\frac{\beta}{\beta-1}, \qquad \beta > 1.$$



Время возврата в единицах v_0/g в зависимости от β; точка — $\beta = 3$ ($t \approx 2{,}6\,v_0/g$). При $\beta \to 1$ время неограниченно растёт, при $\beta \to \infty$ стремится к $2v_0/g$.

Обратите внимание. Ответ имеет смысл только при $\beta > 1$. При $\beta = 1$ шар после второго прохода останавливается ($u = 0$), при $\beta < 1$ едет вперёд ($u > 0$) и в место первого столкновения не возвращается никогда. Условие разрешает любое $\beta > 0$, но вернуться шар может только при $M > m$.

Проверка. Размерность: $[v_0/g] = \text{с}$. Предел $\beta \to \infty$ (куб закреплён): $v_1 \to 0$, шар взлетает вертикально с v_0 и падает обратно через $2v_0/g$, тут же выкатываясь назад к месту удара; формула даёт $t \to 2v_0/g$. Второй способ для шага 4: при упругом взаимодействии относительная скорость меняет знак — до первого входа шар двигался относительно куба вперёд со скоростью v_0, после второго выхода $u - V = -v_0$, назад с той же скоростью. Численно для $\beta = 3$: $t_2 = 1{,}73\,v_0/g$, $s = 0{,}433\,v_0^2/g$, $|u| = v_0/2$, $t_3 = 0{,}87\,v_0/g$, $t = 2{,}60\,v_0/g$ — совпадает с формулой.

Физический смысл: гладкий канал — это растянутый во времени упругий удар; два прохода вместе равносильны упругому удару шара о покоящийся куб, а полёт лишь «вставлен» между половинками этого удара.

Ответ. $t = \dfrac{2v_0}{g}\sqrt{\dfrac{\beta}{1+\beta}} \cdot \dfrac{\beta}{\beta - 1}$ при $\beta > 1$; при $\beta \le 1$ шар не возвращается.