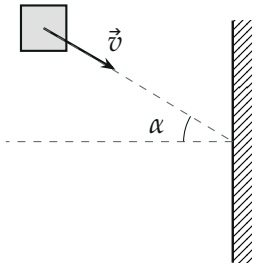
Кубик отскакивает от шероховатой стены

Задача 1. [Курчатов 2020/21, 10 класс, задача 1] Стена абсолютно упруга относительно воздействий вдоль нормали к её поверхности. Поверхность стены также имеет коэффициент трения $\mu = \dfrac{\sqrt{3}}{6}$. В стену бросают абсолютно твёрдый кубик так, что одна грань кубика параллельна стене, а скорость кубика $\vec{v}$ составляет угол α с нормалью к поверхности. Найдите зависимость угла β, под которым кубик отскакивает от стены, от угла α. Постройте качественный график функции $\beta(\alpha)$.



Поясняющий рисунок: кубик летит к стене, его скорость $\vec{v}$ составляет угол α с нормалью к стене.

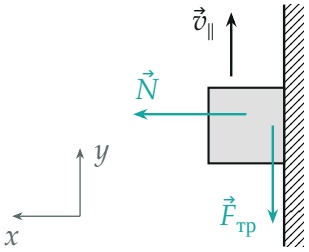
▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на удар с трением. Нормальная составляющая скорости при упругом ударе меняет знак. Касательная составляющая уменьшается силой трения скольжения, которая в каждый момент удара пропорциональна силе реакции стены. Значит, за удар трение «съедает» касательный импульс не больше, чем μ умножить на нормальный импульс удара. Если касательная составляющая мала, трение успевает её погасить и дальше уже не действует (трение покоя не разгоняет кубик назад) — кубик отлетает по нормали.

Обозначения. m — масса кубика; $p_\perp = mv\cos\alpha$, $p_\parallel = mv\sin\alpha$ — нормальная и касательная составляющие импульса до удара; $p'_\perp$, $p'_\parallel$ — после удара; N — сила реакции, $F_{\text{тр}}$ — сила трения; Δt — время удара. Ось x — по нормали от стены, ось y — вдоль стены в сторону касательной скорости.

1. Нормальная составляющая: теорема об изменении импульса. Удар вдоль нормали абсолютно упругий: $p'_\perp = p_\perp$ (кубик отлетает с той же нормальной скоростью). Импульс силы реакции за удар (рисунок 2)

$$\int N\,dt = 2p_\perp.$$

Сила тяжести за короткий удар даёт пренебрежимо малый импульс.



Силы на кубик во время удара: реакция $\vec{N}$ от стены и трение $\vec{F}_{тр}$ против касательной скорости $\vec{v}_\parallel$.

2. Касательная составляющая. Пока кубик скользит вдоль стены, $F_{\text{тр}} = \mu N$ в каждый момент. Импульс силы трения

$$\int F_{\text{тр}}\,dt = \mu \int N\,dt = 2\mu p_\perp.$$

Возможны два случая.

Случай 1: $p_\parallel > 2\mu p_\perp$, то есть $\operatorname{tg}\alpha > 2\mu$. Трение действует весь удар, кубик скользит до конца:

$$p'_\parallel = p_\parallel - 2\mu p_\perp.$$

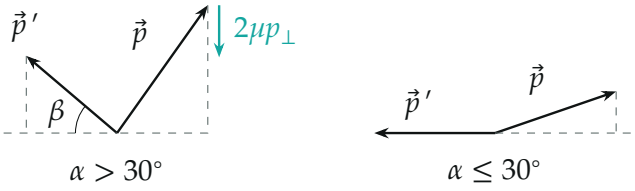
Случай 2: $p_\parallel \le 2\mu p_\perp$. Касательная скорость гаснет раньше конца удара; дальше скольжения нет, а трение покоя кубик назад не разгоняет: $p'_\parallel = 0$.

3. Угол отскока. Угол β отсчитывается от нормали, как и α (рисунок 3):

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{p'_\parallel}{p'_\perp} = \begin{cases} \operatorname{tg}\alpha - 2\mu, & \operatorname{tg}\alpha > 2\mu, \\ 0, & \operatorname{tg}\alpha \le 2\mu. \end{cases}$$

При $\mu = \dfrac{\sqrt{3}}{6}$ величина $2\mu = \dfrac{\sqrt{3}}{3} = \operatorname{tg} 30°$:

$$\beta = \begin{cases} 0, & \alpha \le 30°, \\ \operatorname{arctg}(\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg} 30°), & \alpha > 30°. \end{cases}$$

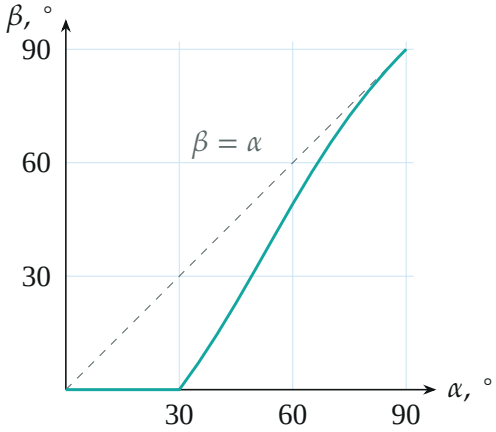


Импульс кубика до удара $\vec{p}$ (направлен к стене — вправо) и после $\vec{p}\,'$: нормальная составляющая меняет знак, касательная уменьшается на $2\mu p_\perp$ (слева) или обнуляется (справа). Построено для $\alpha = 55°$ и $\alpha = 19°$.

4. График. Посчитаем несколько точек:

α, °	30	40	50	60	70	80	90
β, °	0	14,7	31,6	49,1	65,3	78,9	90

До 30° график лежит на оси, затем растёт и при $\alpha \to 90°$ подходит к 90° (касательная скорость огромна, трение её почти не меняет); всё время $\beta < \alpha$ (рисунок 4). Зависимость непрерывна: при $\alpha = 30°$ обе формулы дают $\beta = 0$.



Угол отскока β в зависимости от угла падения α (по вычисленным точкам); пунктир — отражение без трения.

Обратите внимание. Сила трения приложена к грани кубика и создаёт момент, но кубик не закручивается: грань целиком прижата к стене, и сила реакции распределяется по грани неравномерно так, что её момент компенсирует момент трения. Поэтому кубик можно считать поступательно движущимся телом — в этом смысл условия «одна грань параллельна стене».

Ответ: $\beta = 0$ при $\alpha \le 30°$; $\beta = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}30°)$ при $\alpha > 30°$.

Проверка. Предел $\mu \to 0$: $\operatorname{tg}\beta = \operatorname{tg}\alpha$, угол отражения равен углу падения — обычный упругий удар. Знак: $\beta \le \alpha$ — трение только уменьшает касательную скорость. Непрерывность при $\alpha = 30°$ — физически разумно: малое изменение угла не может резко изменить отскок.

Ответ. $\beta = 0$ при $\alpha \le 30°$; $\operatorname{tg}\beta = \operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}30°$ при $\alpha > 30°$; график — ноль до $30°$, затем монотонный рост до $90°$ при $\alpha \to 90°$, всегда $\beta < \alpha$.