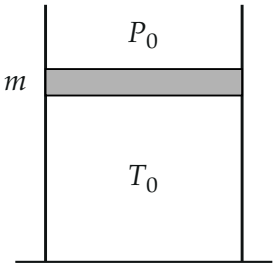
Гелий под поршнем в вакуумной камере

Задача 2. [Курчатов 2020/21, 10 класс, задача 2] Вакуумная камера большого объёма заполнена воздухом при давлении $P_0 = 1$ кПа. В камере расположен высокий вертикальный цилиндр площадью поперечного сечения $S = 100$ см^2. Сверху цилиндр закрыт поршнем массой $m = 2$ кг. Под поршнем находится гелий при температуре $T_0 = 300$ K. В начальном состоянии поршень закреплён, давление гелия также равно P_0. Поршень отпускают, и через некоторое время система переходит в конечное равновесное состояние. Найдите температуру T гелия в этом состоянии. Числовой ответ выразите в кельвинах и округлите до целого значения. Стенки цилиндра и поршень не проводят тепло, поршень движется без трения, давление воздуха в камере постоянно. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.



Поясняющий рисунок: цилиндр с гелием под поршнем в камере с воздухом.

▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на первый закон термодинамики для необратимого процесса. В начале давление гелия равно давлению воздуха, и отпущенный поршень под действием своего веса падает вниз, сжимая гелий. Он проскакивает новое положение равновесия, колеблется, колебания затухают. Теплообмена нет, но процесс резкий, неквазистатический — уравнение адиабаты неприменимо. Работает закон сохранения энергии: внешние силы на поршень (тяжесть и давление воздуха) постоянны, в начале и в конце поршень покоится.

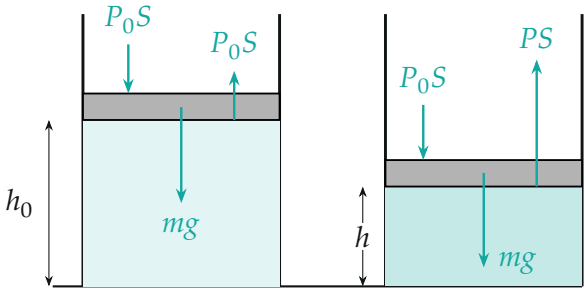
Обозначения. ν — количество гелия; P — конечное давление гелия; h_0, h — начальная и конечная высоты поршня над дном; A — работа

гелия над поршнем; A_0 — работа силы давления воздуха P_0S. Ось y — вертикально вверх.

1. Конечное равновесие поршня. Первый закон Ньютона для поршня в конце, в проекции на ось y (рисунок 2):

$$PS = P_0S + mg.$$

Числа: $P_0S = 10$ Н, $mg = 20$ Н, $PS = 30$ Н — давление гелия вырастет втрое. В начале поршень удерживала защёлка: давление гелия P_0 уравновешивало только воздух.



Слева — начало (поршень закреплён, силы mg не уравновешены; сила защёлки не показана), справа — конечное равновесие: $PS = P_0S + mg$, $h = 0{,}6\,h_0$.

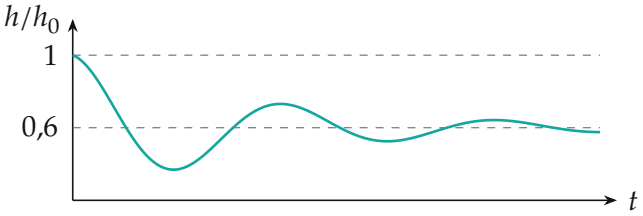
2. Работа гелия: закон изменения кинетической энергии поршня. Поршень опустился с h_0 на h, в начале и в конце покоится:

$$A + A_0 + mg\,(h_0 - h) = 0, \qquad A_0 = P_0S\,(h_0 - h)$$

(воздух давит вниз, поршень идёт вниз — работа воздуха положительна, тяжести — тоже). Отсюда работа гелия

$$A = -(P_0S + mg)(h_0 - h) = -PS\,(h_0 - h) < 0$$

— гелий сжимают, над ним совершают работу.



Качественно: поршень падает, проскакивает положение равновесия $h = 0{,}6\,h_0$, колебания затухают в гелии.

3. Первый закон термодинамики для гелия. $Q = 0$:

$$0 = \Delta U + A = \frac{3}{2}\nu R\,(T - T_0) - PS\,(h_0 - h).$$

4. Уравнение состояния. В начале и в конце:

$$P_0 S h_0 = \nu R T_0, \qquad PSh = \nu RT.$$

Тогда $PSh = \nu RT$, $PSh_0 = \dfrac{P}{P_0}\,\nu RT_0$, и шаг 3 даёт

$$\frac{3}{2}(T - T_0) = \frac{P}{P_0}T_0 - T \quad \Rightarrow \quad T = \frac{2}{5}\Big(\frac{3}{2} + \frac{P}{P_0}\Big)T_0 = T_0\Big(1 + \frac{2mg}{5P_0 S}\Big).$$

С $P/P_0 = 3$:

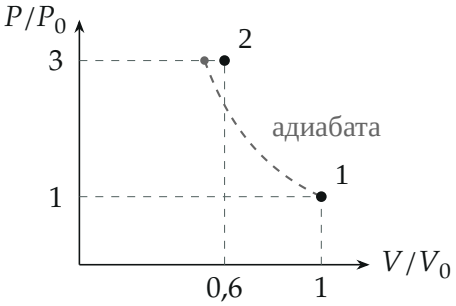
$$T = \frac{2}{5}\cdot 4{,}5 \cdot 300 = 540\ \text{K}.$$

Объём: $\dfrac{h}{h_0} = \dfrac{T}{T_0}\cdot\dfrac{P_0}{P} = 1{,}8\cdot\dfrac{1}{3} = 0{,}6.$

5. Второй способ — энергия системы «гелий + поршень». Внешние силы на систему — тяжесть поршня и давление воздуха, вместе постоянная сила PS вниз; её «потенциальная энергия» $PS\,h$. Внутренняя энергия гелия плюс эта энергия сохраняются:

$$\frac{3}{2}\nu RT + PSh = \frac{3}{2}\nu RT_0 + PSh_0,$$

$$\frac{5}{2}T = \frac{3}{2}T_0 + 3T_0 = 4{,}5\,T_0, \qquad T = 1{,}8\,T_0 = 540\ \text{K}.$$



Начальное (1) и конечное (2) состояния. Медленное сжатие по адиабате до того же давления дало бы объём $0{,}52\,V_0$ *и температуру* 466 K.

Обратите внимание. Уравнение адиабаты $PV^{5/3} = \text{const}$ верно только для медленного процесса. Здесь поршень падает рывком, часть работы уходит в колебания и рассеивается в гелии — температура выше адиабатной: 540 K > 466 K.

Ответ:

$$T = T_0\Big(1 + \frac{2mg}{5P_0S}\Big) = 540\ \text{K}.$$

Проверка. Размерность: $mg/(P_0S)$ безразмерно. Предел $m \to 0$: поршню нечем давить, $T = T_0$. Знак: гелий сжимают без отвода тепла — он нагревается, $T > T_0$. Сравнение с адиабатой ($300 \cdot 3^{2/5} \approx 466$ K) — необратимый процесс горячее, как и должно быть.

Ответ. $T = T_0\Big(1 + \dfrac{2mg}{5P_0S}\Big) = 540\ \text{K}.$