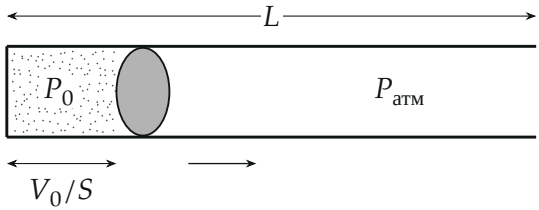
Картофельная пушка

Задача 3. [Курчатов 2020/21, 10 класс, задача 3] Картофельная пушка, стреляющая горизонтально, представляет собой полуоткрытый цилиндр с площадью поперечного сечения $S = 120$ см^2. Когда из пушки стреляют, картофель находится в состоянии покоя, объём между концом цилиндра и картофелем составляет $V_0 = 3100$ см^3, а давление газа в этом объёме составляет $P_0 = 9 \cdot 10^5$ Па. Газ в баллоне двухатомный: $C_v = 5R/2$ и $C_p = 7R/2$. Картофель движется вниз по цилиндру достаточно быстро, чтобы газ не передавал тепло. Трение между картофелем и бочкой незначительно, а утечка газа вокруг картофеля отсутствует. Параметры P_0, V_0 и S фиксированы, но общая длина L не фиксирована. Атмосферное давление — $P_{\text{атм}} = 10^5$ Па.

1. Какова максимальная кинетическая энергия $E_{\max}$, с которой картофель может вылететь из бочки?
2. Какова длина L в этом случае?



Поясняющий рисунок: газ под давлением P_0 в объёме V_0 за картофелиной, ствол длиной L открыт справа.

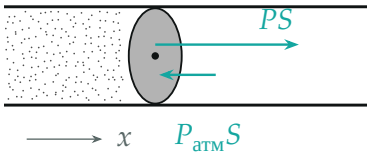
▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на адиабатное расширение газа и работу. Газ толкает картофелину, расширяется без теплообмена (процесс быстрый) и остывает, его давление падает. Снаружи на картофелину давит атмосфера. Пока давление газа больше атмосферного, сумма сил разгоняет картофелину; когда сравняется — начинает тормозить. Значит, энергия на вылете наибольшая, если ствол кончается ровно там, где давление газа упало до $P_{\text{атм}}$. Расширение считаем квазистатическим адиабатным (картофелина движется медленно по сравнению со скоростью звука в газе).

Обозначения. V — объём газа, P — его давление; $\gamma = C_p/C_v = 7/5$; V_f — объём газа в момент, когда $P = P_{\text{атм}}$; A — работа газа; E — кинетическая энергия картофелины.

1. Закон изменения кинетической энергии картофелины. На картофелину вдоль ствола действуют сила давления газа PS вперёд и сила атмосферы $P_{\text{атм}}S$ назад (рисунок 2). При малом смещении dx:

$$dE = (P - P_{\text{атм}})S\,dx = (P - P_{\text{атм}})\,dV.$$

$dE > 0$, пока $P > P_{\text{атм}}$. Давление при расширении только падает, поэтому $E(V)$ растёт до V_f и затем убывает: максимум при $P = P_{\text{атм}}$.



Силы на картофелину вдоль ствола: давление газа PS и атмосферы $P_{атм}S$ (сила тяжести и реакция ствола перпендикулярны движению).

2. Конечный объём: уравнение адиабаты. $PV^\gamma = \text{const}$:

$$V_f = V_0\Big(\frac{P_0}{P_{\text{атм}}}\Big)^{1/\gamma} = 3100 \cdot 9^{5/7}\ \text{см}^3,$$

$$V_f \approx 3100 \cdot 4{,}80 \approx 14\,900\ \text{см}^3.$$

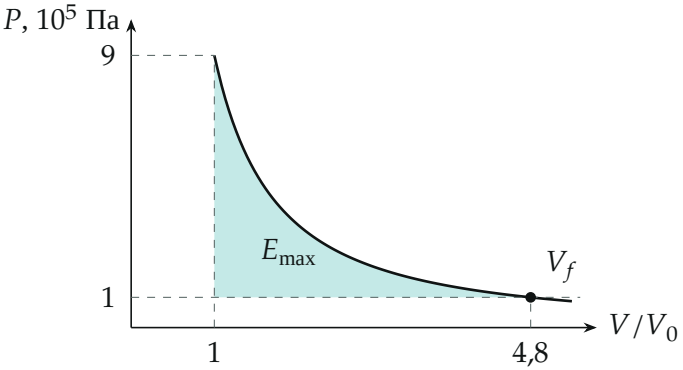
3. Работа газа: первый закон термодинамики. $Q = 0$, работа газа равна убыли внутренней энергии $U = C_v\nu T = \frac{5}{2}PV$:

$$A = U_0 - U_f = \frac{5}{2}(P_0V_0 - P_{\text{атм}}V_f).$$

Работа против атмосферы $P_{\text{атм}}(V_f - V_0)$. По шагу 1

$$E_{\max} = \frac{5}{2}(P_0V_0 - P_{\text{атм}}V_f) - P_{\text{атм}}\,(V_f - V_0).$$

На диаграмме P–V (рисунок 3) это площадь между адиабатой и линией $P = P_{\text{атм}}$.



Адиабата газа (посчитана по $P = 9 \cdot (V_0/V)^{1,4}$) и атмосферное давление. Площадь между ними до V_f — наибольшая кинетическая энергия.

4. Пункт 1: число. Подставим V_f:

$$E_{\max} = V_0\Big(\frac{5}{2}P_0 + P_{\text{атм}} - \frac{7}{2}P_{\text{атм}}^{2/7}P_0^{5/7}\Big).$$

В СИ: $P_0V_0 = 2790$ Дж, $P_{\text{атм}}V_f \approx 1489$ Дж, $P_{\text{атм}}V_0 = 310$ Дж:

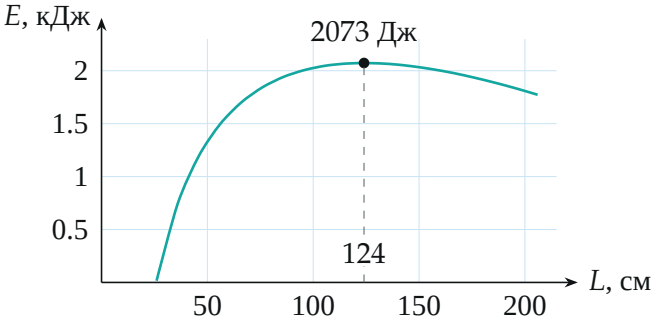
$$E_{\max} \approx \frac{5}{2}(2790 - 1489) - (1489 - 310),$$

$$E_{\max} \approx 3252 - 1179 \approx 2073 \text{ Дж} \approx 2{,}07 \text{ кДж}.$$

5. Пункт 2: длина ствола. Ствол — это весь объём V_f, считая начальный объём газа:

$$L = \frac{V_f}{S} = \frac{V_0}{S}\Big(\frac{P_0}{P_{\text{атм}}}\Big)^{5/7} \approx \frac{14\,890}{120} \text{ см} \approx 124 \text{ см}.$$

Проверка максимума численно — энергия на вылете при разной длине ствола (рисунок 4): при $L = 124$ см максимум, длиннее — картофелину тормозит атмосфера.



Кинетическая энергия картофелины на вылете в зависимости от длины ствола (посчитано по формулам шагов 2–3 для произвольного конечного объёма). Ствол короче $V_0/S \approx 26$ см не имеет смысла.

Обратите внимание. Забыть работу против атмосферы — главная ловушка: без неё «энергия» росла бы с длиной ствола без предела (газ отдавал бы всё больше), и максимума не было бы.

Ответ:

$$E_{\max} = V_0\Big(\frac{5}{2}P_0 + P_{\text{атм}} - \frac{7}{2}P_{\text{атм}}^{2/7}P_0^{5/7}\Big) \approx 2{,}07 \text{ кДж},$$

$$L = \frac{V_0}{S}\Big(\frac{P_0}{P_{\text{атм}}}\Big)^{5/7} \approx 124 \text{ см}.$$

Проверка. Размерность: $V_0 \cdot P$ — джоули. Предел $P_0 \to P_{\text{атм}}$: $E_{\max} = V_0P_{\text{атм}}(\frac{5}{2} + 1 - \frac{7}{2}) = 0$ — газ не сжат, разгонять нечем. Второй способ — численно (рисунок 4): максимум энергии 2073 Дж при $L \approx 124$ см.

Ответ. 1) $E_{\max} = V_0\Big(\frac{5}{2}P_0 + P_{\text{атм}} - \frac{7}{2}P_{\text{атм}}^{2/7}P_0^{5/7}\Big) \approx 2073$ Дж; 2) $L = \frac{V_0}{S}\Big(\frac{P_0}{P_{\text{атм}}}\Big)^{5/7} \approx 124$ см.