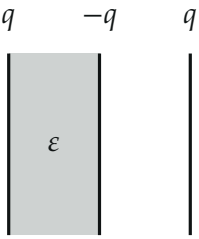
Три пластины с диэлектриком

Задача 4. [Курчатов 2020/21, 10 класс, задача 4] Три одинаковые тонкие проводящие пластины расположены параллельно друг другу на равных расстояниях. Каждая из крайних пластин несёт заряд q, заряд средней пластины равен $(-q)$. Всё пространство между левой и средней пластинами заполняют твёрдым однородным диэлектриком с проницаемостью $\varepsilon = 4$ и соединяют крайние пластины тонким проводом (провод не касается средней пластины). Найдите отношение $x = q_1/q_2$, где q_1 и q_2 — установившиеся заряды левой и правой пластин.



▲ **Решение.** **Что происходит.** Это задача на систему заряженных пластин (плоские конденсаторы) с проводником. После того как крайние пластины соединили проводом, по нему перетекает заряд, пока потенциалы крайних пластин не сравняются. Значит, два условия: сохраняется суммарный заряд крайних пластин, и напряжение между ними равно нулю. Диэлектрик ослабляет поле слева в ε раз, поэтому, чтобы набрать то же напряжение на левом промежутке, нужно больше заряда — заряд перетечёт на левую пластину, $x > 1$.

Обозначения. S — площадь пластин, d — расстояние между соседними пластинами; $\sigma_1 = q_1/S$, $\sigma_2 = q_2/S$, $\sigma = q/S$; область 1 — между левой и средней пластинами (с диэлектриком), область 2 — между средней и правой; ось x — слева направо, E_{1x}, E_{2x} — проекции напряжённости в областях (рисунок 2).

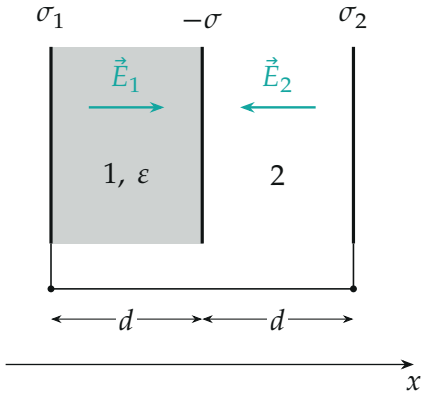
1. Закон сохранения заряда для изолированной системы «крайние пластины + провод» (средняя пластина проводом не задета, её заряд $-q$ не меняется):

$$q_1 + q_2 = 2q.$$

2. Поле в промежутках. По принципу суперпозиции каждая пластина создаёт поле $\sigma/(2\varepsilon_0)$ от себя; слева от точки пластины толкают вдоль $+x$, справа — вдоль $-x$. В однородном диэлектрике, заполняющем промежуток, поле ослаблено в ε раз. Проекции на ось x:

$$E_{1x} = \frac{\sigma_1 - (-\sigma) - \sigma_2}{2\varepsilon\varepsilon_0} = \frac{\sigma_1 + \sigma - \sigma_2}{2\varepsilon\varepsilon_0},$$

$$E_{2x} = \frac{\sigma_1 + (-\sigma) - \sigma_2}{2\varepsilon_0} = \frac{\sigma_1 - \sigma - \sigma_2}{2\varepsilon_0}.$$



Плотности зарядов пластин после соединения и поле в промежутках (направления — для найденного ответа: $E_{1x} > 0$, $E_{2x} < 0$).

3. Равенство потенциалов. Работа поля над пробным зарядом e, перенесённым вдоль оси x от левой пластины к правой, равна $e(\varphi_1 - \varphi_2)$; поле в каждом промежутке однородно, поэтому

$$\varphi_1 - \varphi_2 = E_{1x}d + E_{2x}d.$$

Крайние пластины и провод — один проводник, его потенциал всюду одинаков: $\varphi_1 = \varphi_2$, и

$$E_{1x} + E_{2x} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\sigma_1 + \sigma - \sigma_2}{\varepsilon} + \sigma_1 - \sigma - \sigma_2 = 0.$$

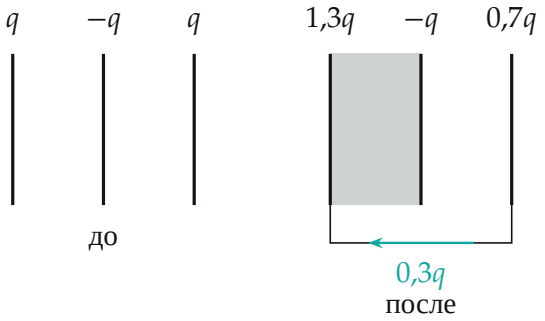
Умножим на εS:

$$q_1 + q - q_2 + \varepsilon(q_1 - q - q_2) = 0 \quad \Rightarrow \quad q_1 - q_2 = q\,\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 1}.$$

4. Заряды пластин. Складываем и вычитаем с уравнением п. 1:

$$q_1 = q\,\frac{3\varepsilon + 1}{2(\varepsilon + 1)} = \frac{13}{10}\,q, \qquad q_2 = q\,\frac{\varepsilon + 3}{2(\varepsilon + 1)} = \frac{7}{10}\,q.$$

По проводу слева направо прошёл заряд $-0{,}3q$: с правой пластины на левую перетекло $0{,}3q$ (рисунок 3).

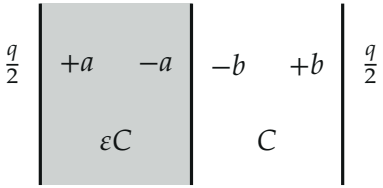


Заряды пластин до и после: по проводу на левую пластину перетекает $0{,}3q$.

5. Второй способ — через ёмкости. Заряд $-q$ средней пластины делится между её гранями: $-a$ слева и $-b$ справа, $a+b=q$; на обращённых к ней гранях крайних пластин — $+a$ и $+b$. Это два конденсатора εC и C ($C = \varepsilon_0 S/d$) с общей обкладкой; провод делает их напряжения равными (рисунок 4):

$$\frac{a}{\varepsilon C} = \frac{b}{C} \quad \Rightarrow \quad a = \frac{\varepsilon q}{\varepsilon + 1} = \frac{4}{5}q, \quad b = \frac{q}{\varepsilon + 1} = \frac{1}{5}q.$$

Остаток заряда системы $2q - q = q$ сидит на внешних гранях поровну, по $q/2$ (поле снаружи с обеих сторон одинаково). Тогда $q_1 = \frac{q}{2} + \frac{4}{5}q = 1{,}3q$, $q_2 = \frac{q}{2} + \frac{1}{5}q = 0{,}7q$ — то же.



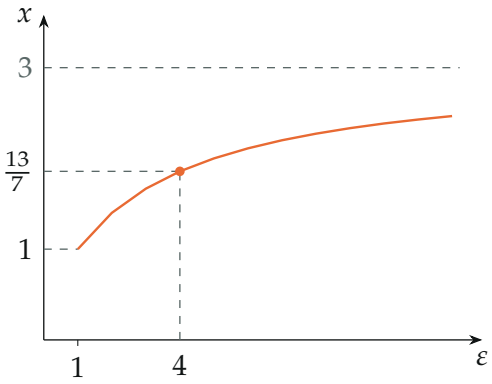
Заряды на гранях пластин: два конденсатора с общей средней обкладкой, внешние грани несут по $q/2$.

Обратите внимание. Поле в области 1 делится на ε целиком: диэлектрик заполняет весь промежуток, и связанные заряды на его гранях ослабляют поле ровно в ε раз.

Ответ:

$$x = \frac{q_1}{q_2} = \frac{3\varepsilon + 1}{\varepsilon + 3} = \frac{13}{7} \approx 1{,}86.$$

Проверка. Без диэлектрика ($\varepsilon = 1$) получаем $x = 1$: система симметрична, ток по проводу не идёт. При $\varepsilon \to \infty$ имеем $x \to 3$: левый промежуток забирает весь заряд средней грани, $q_1 = \frac{q}{2} + q$, $q_2 = \frac{q}{2}$ (рисунок 5). Отношение растёт с ε — чем сильнее диэлектрик, тем больше заряда притягивает левая пластина.



Зависимость $x(\varepsilon) = \dfrac{3\varepsilon + 1}{\varepsilon + 3}$, вычисленная по точкам: от 1 при $\varepsilon = 1$ к пределу 3; точка — условие задачи.

Ответ. $x = \dfrac{3\varepsilon + 1}{\varepsilon + 3} = \dfrac{13}{7} \approx 1{,}86.$