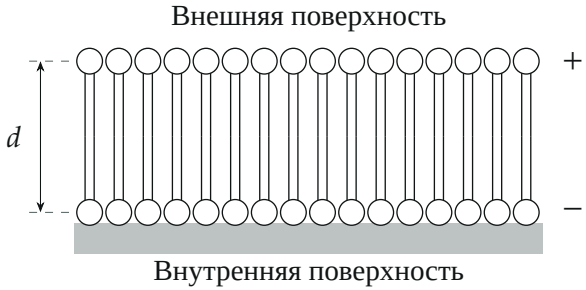
Мембрана нейрона как пружинный конденсатор

Задача 5. [Курчатов 2020/21, 10 класс, задача 5] Стенка нейрона состоит из эластичной двуслойной липидной мембраны, которая сопротивляется сжатию так же, как пружина. Она имеет эффективную жёсткость k и равновесную толщину d_0. Локально рассмотрим участок мембраны, имеющий незначительную кривизну, у которого площадь поверхности каждого из двух слоёв равна S. В стенках клетки находятся специальные белковые ионные помпы, которые могут перемещать различные ионы через мембрану. В результирующем заряженном состоянии в межклеточной среде положительный и отрицательный ионный заряд равномерно распределяется вдоль внешней и внутренней поверхностей мембраны соответственно. После того как ионные насосы проделали некоторую работу, на внешней и внутренней поверхностях наводится заряд, поэтому толщина мембраны изменяется до некоторого нового значения. Предположим, что ионные помпы включаются, когда мембрана незаряжена, а мембрана заряжается достаточно медленно (квазистатически). Помпы прекращают работу в случае, если разность напряжений на мембране станет больше определённого порогового значения V_n. Насколько должна быть велика жёсткость пружины k, чтобы ионные помпы отключились до того, как мембрана разрушится? Диэлектрическая проницаемость мембраны ε.



▲ **Решение.** **Что происходит.** Это задача на плоский конденсатор с подвижной обкладкой на пружине. Слои мембраны — обкладки с зарядами $+Q$ и $-Q$; они притягиваются и сжимают «пружину» мембраны. С ростом Q поле растёт, а зазор уменьшается, поэтому напряжение

$V = Ed$ сначала растёт, достигает максимума и падает до нуля, когда слои сходятся (мембрана разрушена). Помпы выключатся, только если этот максимум выше порога V_n. Законы: теорема Гаусса для заряженной плоскости, условие равновесия (заряжение квазистатическое) и закон Гука.

Обозначения. Q — модуль заряда каждого слоя; d — толщина мембраны при заряде Q; $x = d_0 - d$ — сжатие; E — поле внутри мембраны; F_E — сила притяжения слоёв, F_k — сила упругости (рисунок 2).

1. Поле и сила притяжения. По теореме Гаусса один слой с зарядом Q в диэлектрике создаёт по обе стороны поле

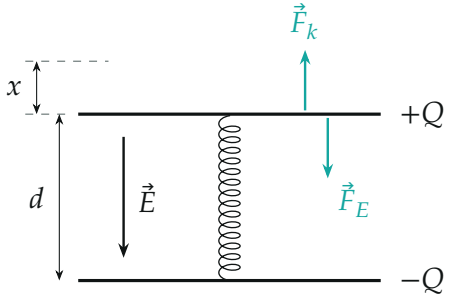
$$E_1 = \frac{Q}{2\varepsilon\varepsilon_0 S}.$$

Другой слой находится в этом поле, сила на него (своё поле слоя на сам слой не действует):

$$F_E = QE_1 = \frac{Q^2}{2\varepsilon\varepsilon_0 S}.$$

Внутри мембраны поля слоёв $+Q$ и $-Q$ направлены одинаково (от $+$ к $-$) и складываются:

$$E = 2E_1 = \frac{Q}{\varepsilon\varepsilon_0 S}.$$



Силы на внешний слой: притяжение к внутреннему $\vec{F}_E$ и упругость мембраны $\vec{F}_k$; пунктир — положение незаряженного слоя, сжатие x.

2. Равновесие слоя. Заряжение медленное, слой всё время в равновесии; второй закон Ньютона в проекции на нормаль к мембране: $F_E = F_k = k(d_0 - d)$, откуда

$$d = d_0 - \frac{Q^2}{2\varepsilon\varepsilon_0 Sk}.$$

При постоянном Q сила F_E от d не зависит, поэтому равновесие устойчиво при любом $d > 0$ — скачков нет, d плавно убывает с ростом Q до нуля при $Q_\text{p} = \sqrt{2\varepsilon\varepsilon_0 Skd_0}$ (разрушение).

3. Напряжение как функция заряда. Поле однородно:

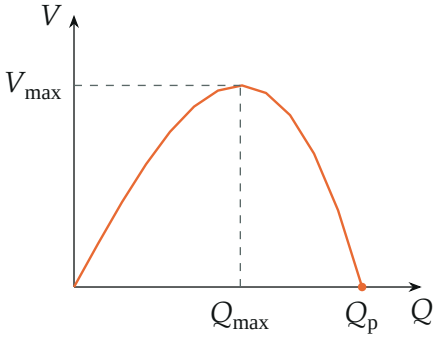
$$V = Ed = \frac{Q}{\varepsilon\varepsilon_0 S}\Big(d_0 - \frac{Q^2}{2\varepsilon\varepsilon_0 Sk}\Big).$$

$V(0) = 0$ и $V(Q_\text{p}) = 0$, между ними — максимум (рисунок 3). Производная:

$$\frac{dV}{dQ} = \frac{d_0}{\varepsilon\varepsilon_0 S} - \frac{3Q^2}{2\varepsilon^2\varepsilon_0^2 S^2 k} = 0 \quad \Rightarrow \quad Q_\text{max}^2 = \frac{2\varepsilon\varepsilon_0 Skd_0}{3} = \frac{Q_\text{p}^2}{3}.$$

В максимуме $d = d_0 - \frac{d_0}{3} = \frac{2}{3}d_0$ и

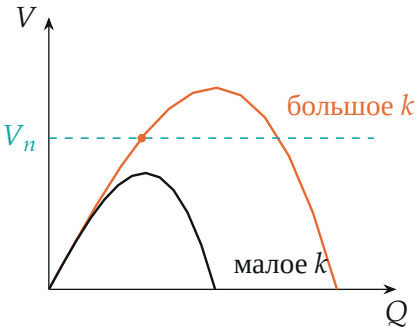
$$V_\text{max} = \frac{Q_\text{max}}{\varepsilon\varepsilon_0 S} \cdot \frac{2d_0}{3} = \Big(\frac{2d_0}{3}\Big)^{3/2}\sqrt{\frac{k}{\varepsilon\varepsilon_0 S}}.$$



Напряжение на мембране от заряда (по вычисленным точкам): максимум при $Q_{max} = Q_p/\sqrt{3}$, при Q_p слои сошлись.

4. Условие отключения помп. Если $V_{max} < V_n$, напряжение порога не достигает, помпы качают дальше, и Q доходит до Q_p — мембрана разрушается. Помпы выключатся, если $V_{max} > V_n$ (рисунок 4):

$$\left(\frac{2d_0}{3}\right)^3 \frac{k}{\varepsilon\varepsilon_0 S} > V_n^2 \quad \Rightarrow \quad k > \left(\frac{3}{2}\right)^3 \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S V_n^2}{d_0^3}.$$



Две жёсткости: при большой k кривая пересекает порог V_n (точка) — помпы выключаются; при малой не достаёт до V_n и уходит в нуль — разрушение.

Обратите внимание. Сила притяжения слоёв — QE_1, а не QE: на слой действует только поле другого слоя, вдвое меньшее полного поля внутри.

Ответ:

$$k > \left(\frac{3}{2}\right)^3 \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S V_n^2}{d_0^3} = \frac{27}{8}\,\frac{\varepsilon\varepsilon_0 S V_n^2}{d_0^3}.$$

Проверка. Размерность: $\varepsilon_0 S V^2/d^3 = (\varepsilon_0 S/d)V^2/d^2$ — энергия на квадрат длины, Дж/м^2 = Н/м, жёсткость. Второй способ — через толщину: из п. 2 $Q^2 = 2\varepsilon\varepsilon_0 S k(d_0 - d)$, тогда $V^2 = \dfrac{Q^2 d^2}{(\varepsilon\varepsilon_0 S)^2} = \dfrac{2k}{\varepsilon\varepsilon_0 S}\,(d_0 - d)d^2$; максимум $(d_0 - d)d^2$ при $d = \frac{2}{3}d_0$ равен $\frac{4}{27}d_0^3$, и $V_{\max}^2 = \frac{8}{27}\,\frac{k d_0^3}{\varepsilon\varepsilon_0 S}$ — то же. Смысл: жёсткая мембрана мало сжимается, напряжение успевает дорасти до порога; мягкая сжимается быстрее, чем растёт поле.

Ответ. $k > \left(\dfrac{3}{2}\right)^3 \dfrac{\varepsilon\varepsilon_0 S V_n^2}{d_0^3}$.